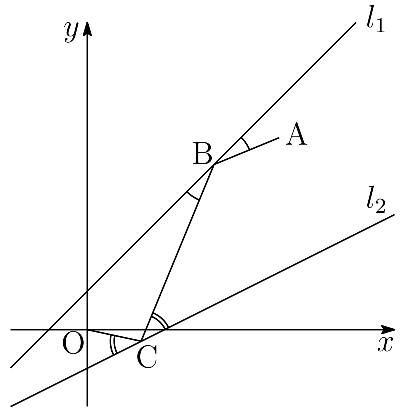
# 平成 20 年度　佐賀大学２次試験前期日程 (数学問題)
## 理工・農・文化教育学部　平成 20 年 2 月 25 日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B・C (120 分)
- 農学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ 数 I・II・A・B (120 分)
- 文化教育学部は，$\boxed{8}$ ～ $\boxed{11}$ 数 I・II・A・B (100 分)

**1** O を原点とする座標平面上の 2 直線 $x-y+1=0$ と $x-2y-2=0$ をそれぞれ $l_1$，$l_2$ とし，点 A$(5,\ 5)$ をとる．点 B と点 C はそれぞれ $l_1$，$l_2$ 上にあるとする．ただし，右図の影をつけた部分の角が示しているように，線分 AB，BC と直線 $l_1$ とのなす角は等しく，線分 BC，CO と直線 $l_2$ とのなす角は等しいとする．




(1) $a \neq 0$，$b \neq 0$，$c \neq 0$ を満たす定数 $a$，$b$，$c$ に対して，直線 $ax+by+c=0$ を $l$ とする．直線 $l$ に関して点 P$(m,\ n)$ と対称な点 Q の座標は $\left(m - \dfrac{2a(am+bn+c)}{a^2+b^2},\ n - \dfrac{2b(am+bn+c)}{a^2+b^2}\right)$ であることを証明せよ．ただし，P は $l$ 上の点でないとする．

(2) 点 B と点 C の座標を求めよ．

**2** $0<a<1$，$0<b<1$ を満たす実数 $a$，$b$ に対して，行列

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \dfrac{1-a}{1-b} \end{pmatrix}$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) $P$ の逆行列 $P^{-1}$ を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ を求めよ．

(3) 自然数 $n$ に対して，$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n$ を求めよ．

(4) $x_n$，$y_n$ は，どのような試行に対する，どのような事象の確率を与えていると考えられるか，例を 1 つ示せ．

**3** $n$ は自然数とし，数列 $\{x_n\}$ は

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{4}{x_n}\right) \quad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases}$$

によって定まるものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) すべての $n$ について $x_n \geqq 2$ であることを証明せよ．

(2) すべての $n$ について $x_{n+1} - 2 \leqq \dfrac{1}{2}(x_n - 2)$ であることを証明せよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

(4) $f(x) = x$，$g(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{4}{x}\right)$ とするとき，$g(x) > f(x)$ となる $x$ の範囲を求めよ．

(5) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ および $x = 1$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

**4** (1) 自然数 $n$ と実数 $\alpha$ について，$n$ が偶数のとき，

$$\int_0^{\pi} \sin^n(\alpha + x)\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi} \sin^{n-2}(\alpha + x)\,dx$$

となることを示せ．

(2) $a \neq 0$，$b \neq 0$ を満たす実数 $a$，$b$ に対して，

$$\int_0^{\pi} (a\sin x + b\cos x)^6\,dx$$

を求めよ．

**5** $a > 1$ とする．

$$y = -(\log_a x)^2 + \log_a x^4$$

について，次の問いに答えよ．

(1) $\log_a x = t$ とおくとき，$y$ を $t$ の式として表せ．

(2) $0 \leqq y \leqq 3$ となる $t$ の範囲を求めよ．

(3) $2 \leqq x \leqq 4$ を満たすすべての $x$ に対して，$0 \leqq y \leqq 3$ となる $a$ の範囲を求めよ．

**6** 大，中，小3つのさいころを同時に投げて，出た目を $a$，$b$，$c$ とする．ただし，$b \geqq a \geqq c$ とする．2次関数

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

を考え，放物線 $y = f(x)$ を $G$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の $A$ は $a$，$b$ を用いて表し，$B$ は $a$，$b$，$c$ を用いて表せ．

$$ax^2 + bx + c = a(x + A)^2 - B$$

(2) $G$ と $x$ 軸とが異なる2点で交わるとき，交点の $x$ 座標をそれぞれ $\alpha < \beta$ とする．2点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ における $G$ の接線をそれぞれ $G_1$，$G_2$ とする．$G$ と $G_1$ および $G_2$ によって囲まれる図形の面積 $S$ を $a$，$b$，$c$ を用いて表せ．

(3) $G$ と $x$ 軸とが2点で交わって，しかも $S \leqq \dfrac{1}{24}$ となる確率を求めよ．

(4) (3) の場合は $X = b$ とし，それ以外の場合には $X = 0$ とする．$X$ の期待値を求めよ．

**7** 座標平面上の曲線 $y = x^2$ を $C$ とし，$m$ を $0 \leqq m \leqq 1$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 点 $(m,\ m^2)$ における $C$ の接線 $L_m$ の式を求めよ．

(2) $\mathrm{P}(1,\ a)$ と $\mathrm{Q}(b,\ 0)$ を $L_m$ 上の点とする．$a$ と $b$ を $m$ の式で表せ．

(3) $\mathrm{R}(1,\ 0)$ について，三角形PQRの面積を $m$ の式で表せ．

(4) 三角形PQRの面積の最大値を求めよ．

**8** 次の問いに答えよ．

(1) 鋭角三角形ABCの外接円の半径を $R$ とし，頂点A，B，Cに向かい合う辺の長さを $a$，$b$，$c$ とおく．このとき，

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

を証明せよ．

(2) $45^\circ$，$60^\circ$，$75^\circ$ を内角にもつ三角形を利用して，$\sin 75^\circ$ の値を求めよ．

**9** 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = x^3 - 4x^2 + 3x$ の増減を調べ，そのグラフをかけ．

(2) $y$ 軸上の点 $(0,\ a)$ を通る (1) のグラフの接線で，接点の $x$ 座標が正であるものは何本あるか．

$\boxed{\mathbf{10}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 平面において，一直線上に相異なる 3 点 A，P，B をこの順にとる．次に線分 AB を直径とする半円 $C$ をかき，点 P を通る直線 AB の垂線と半円 $C$ との交点を Q とする．このとき，半円 $C$ の半径と線分 PQ の長さをそれぞれ線分 AP の長さと線分 BP の長さを用いて表せ．

(2) (1) を用いて，2 つの正の数 $a$，$b$ に対して，不等式

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのはどのような場合かも示せ．

$\boxed{\mathbf{11}}$ 平面上の平行でない 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB_0}}$ が，$\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB_0}} > 0$ を満たし，点 X が

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA_0}} + \overrightarrow{\mathrm{OB_0}}$$

を満たしているとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 X を通る直線が点 O と異なる 2 点 A，B で 2 本の半直線 $\mathrm{OA_0}$，$\mathrm{OB_0}$ とそれぞれ交わり，点 X が線分 AB を $t : 1-t$ に内分するとする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = p\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = q\overrightarrow{\mathrm{OB_0}}$$

とおくとき，$p$ と $q$ をそれぞれ $t$ を用いて表せ．

(2) 数 $t$ が不等式 $0 < t < 1$ を満たすとき，半直線 $\mathrm{OA_0}$ 上の点 A と半直線 $\mathrm{OB_0}$ 上の点 B で，点 X が線分 AB を $t : 1-t$ に内分する点となるものがとれることを示せ．

(3) 点 O と異なる 2 点 A，B がそれぞれ半直線 $\mathrm{OA_0}$，$\mathrm{OB_0}$ 上を，直線 AB が点 X を通るように動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が最小となるのは，点 X が線分 AB の中点のときであることを示せ．

# 正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) P$(m,\ n)$ から直線 $l : ax+by+c=0$ に引いた垂線 PH を引くと，
実数 $t$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PH}} = (m,\ n) + t(a,\ b) = (m+at,\ n+bt)$$

H は $l$ 上の点であるから

$$a(m+at)+b(n+bt)+c=0 \quad \text{ゆえに} \quad t = -\frac{am+bn+c}{a^2+b^2}$$

このとき
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} + 2t(a,\ b)\\ &= (m,\ n) - \frac{2(am+bn+c)}{a^2+b^2}(a,\ b)\\ &= \left(m - \frac{2a(am+bn+c)}{a^2+b^2},\ n - \frac{2b(am+bn+c)}{a^2+b^2}\right)\end{aligned}$$

よって
$$\mathrm{Q}\left(m - \frac{2a(am+bn+c)}{a^2+b^2},\ n - \frac{2b(am+bn+c)}{a^2+b^2}\right)$$

(2) $l_1$ に関して A と対称な点を A′，$l_2$ に関して O と対称な点を O′ とすると，
(1) の結果から

$$\mathrm{A}'(4,\ 6), \quad \mathrm{O}'\left(\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}\right)$$

2 点 A′O′ を通る直線の方程式は　$19x-8y-28=0$

この直線と $l_1$，$l_2$ との交点が，それぞれ B，C であるから，これらの直線の方程式を連立することにより

$$\mathbf{B}\left(\frac{\mathbf{36}}{\mathbf{11}}, \frac{\mathbf{47}}{\mathbf{11}}\right),\ \mathbf{C}\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\det P = 1\cdot\dfrac{1-a}{1-b} - 1\cdot(-1) = \dfrac{2-a-b}{1-b}$

ゆえに　$P^{-1} = \dfrac{1}{\det P}\begin{pmatrix} \frac{1-a}{1-b} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{2-a-b}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{1-a} & \boldsymbol{b-1} \\ \boldsymbol{1-b} & \boldsymbol{1-b} \end{pmatrix}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{2-a-b}\begin{pmatrix} 1-a & b-1 \\ 1-b & 1-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{1-a}{1-b} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2-a-b}\begin{pmatrix} 1-a & b-1 \\ 1-b & 1-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+b-1 & 1 \\ 1-a-b & \frac{1-a}{1-b} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a+b-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

解説 2つのベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-a}{1-b} \end{pmatrix}$ は，それぞれ $A$ の固有値 $a+b-1$，1 に対する固有ベクトルである．

一般に，2次の正方行列 $A$ が異なる2つの固有値 $\lambda_1$，$\lambda_2$ をもち，それぞれの固有ベクトルを $u_1$，$u_2$ とし，$P = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}$ とおくと

$$A\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 u_2 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

よって　$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

(3) (2) の結果から

$$
\begin{aligned}
(P^{-1}AP)^n &= \begin{pmatrix} a+b-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \\
P^{-1}A^nP &= \begin{pmatrix} (a+b-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A^n &= P\begin{pmatrix} (a+b-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}
\end{aligned}
$$

$0<a<1$，$0<b<1$ より，$-1<a+b-1<1$ であるから

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} A^n &= \frac{1}{2-a-b}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \frac{1-a}{1-b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-a & b-1 \\ 1-b & 1-b \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2-a-b}\begin{pmatrix} 1-b & 1-b \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

上式および $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ から

$$
\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1-b}{2-a-b},\ \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1-a}{2-a-b}}
$$

(4) (マルコフ連鎖)

雨の降った翌日に雨が降る確率を $a$，雨が降らなかった翌日も雨が降らない確率を $b$ とする．$n$ 日後に，雨が降る確率を $x_n$，雨が降らない確率を $y_n$ とする．ただし，本日の雨が降る確率を $\frac{1}{3}$ とする．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{4}{x_n}\right)$ より $\qquad x_{n+1} - 2 = \dfrac{1}{2x_n}(x_n - 2)^2 \quad \cdots$ ①

$x_1 = 3 \geqq 2$．$x_n \geqq 2$ のとき，$x_{n+1} \geqq 2$．

数学的帰納法により，すべての自然数 $n$ に対して　$x_n \geqq 2$

(2) ① および $x_n \geqq 2$ から

$$\begin{aligned} x_{n+1} - 2 &= \frac{x_n - 2}{x_n} \times \frac{1}{2}(x_n - 2) \\ &= \left(1 - \frac{2}{x_n}\right) \times \frac{1}{2}(x_n - 2) \leqq \frac{1}{2}(x_n - 2) \end{aligned}$$

(3) (1)，(2) の結果から

$$0 \leqq x_n - 2 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x_1 - 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} x_n = 2}$$

(4) $g(x) > f(x)$ より

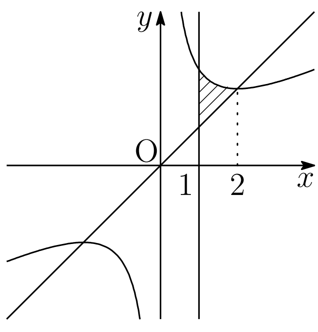
$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right) > x \quad \text{整理すると} \quad x - \frac{4}{x} < 0$$

両辺に $x^2 > 0$ を掛けると $\qquad x(x+2)(x-2) < 0$

よって $\qquad \boldsymbol{x < -2,\ 0 < x < 2}$

(5) (4) の結果から，求める面積を $S$ とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \{g(x) - f(x)\}\,dx \\ &= \int_1^2 \left\{\frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right) - x\right\} dx \\ &= \left[\ 2\log x - \frac{x^2}{4}\ \right]_1^2 = \boldsymbol{2\log 2 - \frac{3}{4}} \end{aligned}$$



$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin^n(\alpha + x)\,dx$ とおくと

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^\pi \sin^{n-1}(\alpha+x)\{-\cos(\alpha+x)\}'\,dx \\
&= \Big[\ \sin^{n-1}(\alpha+x)\{-\cos(\alpha+x)\}\ \Big]_0^\pi \\
&\qquad - \int_0^\pi (n-1)\sin^{n-2}(\alpha+x)\cos(\alpha+x)\{-\cos(\alpha+x)\}\,dx \\
&= -(-1)^n \sin\alpha^{n-1}\cos\alpha + \sin^{n-1}\alpha\cos\alpha \\
&\qquad + (n-1)\int_0^\pi \sin^{n-2}(\alpha+x)\{1-\sin^2(\alpha+x)\}\,dx \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n
\end{aligned}$$

したがって　$I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$

よって　$\displaystyle\int_0^\pi \sin^n(\alpha+x)\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^\pi \sin^{n-2}(\alpha+x)\,dx$

(2) $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ とおくと

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+x)$$

したがって　$\displaystyle\int_0^\pi (a\sin x + b\cos x)^6\,dx = (a^2+b^2)^3 I_6$

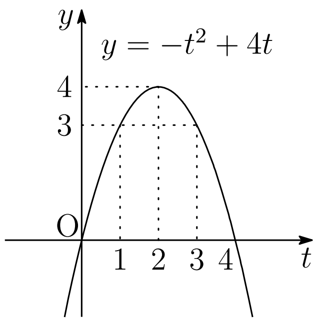
(1) の結果から

$$\frac{I_6}{I_4} = \frac{5}{6},\quad \frac{I_4}{I_2} = \frac{3}{4},\quad \frac{I_2}{I_0} = \frac{1}{2}\quad \text{ゆえに}\quad I_6 = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0$$

よって
$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (a\sin x + b\cos x)^6\,dx &= (a^2+b^2)^3 I_6 \\
&= (a^2+b^2)^3\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0 \\
&= \frac{5}{16}(a^2+b^2)^3\int_0^\pi dx \\
&= \boldsymbol{\frac{5}{16}(a^2+b^2)^3\pi}
\end{aligned}$$

**5** (1) $y=-(\log_a x)^2+4\log_a x$ より

$$\boldsymbol{y=-t^2+4t}$$




(2) $0 \leqq y \leqq 3$ のとき　$0 \leqq -t^2+4t \leqq 3$

ゆえに　$\begin{cases} -t^2+4t \geqq 0 \\ -t^2+4t \leqq 3 \end{cases}$

これを解いて　$\boldsymbol{0 \leqq t \leqq 1,\ 3 \leqq t \leqq 4}$

(3) (2) の結果から　$0 \leqq \log_a x \leqq 1$　または　$3 \leqq \log_a x \leqq 4$

$a>1$ であるから

$$\log_a 1 \leqq \log_a x \leqq \log_a a \quad \text{または} \quad \log_a a^3 \leqq \log_a x \leqq \log_a a^4$$

すなわち　$1 \leqq x \leqq a$　または　$a^3 \leqq x \leqq a^4$

$2 \leqq x \leqq 4$ を満たすすべての $x$ に対して，これが成り立つならば

$$\text{i)}\ \ 4 \leqq a \quad \text{または} \quad \text{ii)}\ \begin{cases} a^3 \leqq 2 & (a \leqq 2^{\frac{1}{3}}) \\ a^4 \geqq 4 & (a \geqq 2^{\frac{1}{2}}) \end{cases}$$

このとき，ii) を満たす $a$ は存在しない．よって　$\boldsymbol{a \geqq 4}$

**6** (1) $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

これと $y=ax^2+bx+c=a(x+A)^2-B$ から

$$\boldsymbol{A=\frac{b}{2a},\ B=\frac{b^2-4ac}{4a}}$$

(2) $f(x)=ax^2+bx+c$ について，次式が成り立つ．

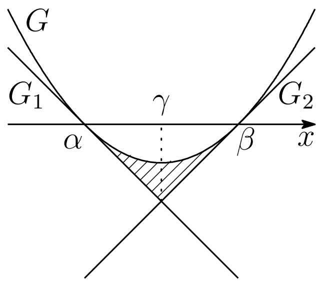
$$f(x)=f(t)+f'(t)(x-t)+a(x-t)^2$$

ここでは，$f(\alpha)=f(\beta)=0$ であるから

$$f(x)-f'(\alpha)(x-\alpha)=a(x-\alpha)^2 \quad \cdots ①$$
$$f(x)-f'(\beta)(x-\beta)=a(x-\beta)^2 \quad \cdots ②$$

このとき　$G_1: y=f'(\alpha)(x-\alpha)$，$G_2: y=f'(\beta)(x-\beta)$　　$(\alpha<\beta)$

$G_1$ と $G_2$ の共有点の $x$ 座標を $\gamma$ とすると，




$$f'(\alpha)(\gamma-\alpha)=f'(\beta)(\gamma-\beta)$$

上式に注意して ①，② に $x=\gamma$ を代入すると

$$a(\gamma-\alpha)^2=a(\gamma-\beta)^2$$

ゆえに　$$(\gamma-\alpha)^2=(\gamma-\beta)^2$$

$\alpha<\gamma<\beta$ であるから

$$\gamma-\alpha=\beta-\gamma \quad \text{よって} \quad \gamma=\frac{\alpha+\beta}{2} \quad \cdots ③$$

①，②，③ より

$$\begin{aligned}
S&=\int_\alpha^\gamma\{f(x)-f'(\alpha)(x-\alpha)\}\,dx+\int_\gamma^\beta\{f(x)-f'(\beta)(x-\beta)\}\,dx\\
&=\frac{a}{3}\Big[\ (x-\alpha)^3\ \Big]_\alpha^\gamma+\frac{a}{3}\Big[\ (x-\beta)^3\ \Big]_\gamma^\beta\\
&=\frac{a}{3}(\gamma-\alpha)^3-\frac{a}{3}(\gamma-\beta)^3\\
&=\frac{a}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)^3-\frac{a}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)^3=\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3 \quad \cdots ④
\end{aligned}$$

$\alpha$，$\beta$ は2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解であるから，解と係数の関係より

$$\begin{aligned}
(\beta-\alpha)^2&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\\
&=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-4\cdot\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{a^2}
\end{aligned}$$

したがって　$$\beta-\alpha=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

これを ④ に代入して　$\boldsymbol{S=\dfrac{(b^2-4ac)^{\frac{3}{2}}}{12a^2}}$

(3) $x$ 軸と異なる 2 点で交わるから　$b^2-4ac>0$

このとき，$b \geqq a \geqq c$ であるから　$b \geqq 3$，$c \leqq 2$

$D=b^2-4ac$ とおくと

| $D$ の値 ($c=1$) | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a \backslash b$ | **3** | **4** | **5** | **6** |
| **1** | 5 | 12 | 21 | 32 |
| **2** | 1 | 8 | 17 | 28 |
| **3** | − | 4 | 13 | 24 |
| **4** | × | 0 | 9 | 20 |
| **5** | × | × | 5 | 16 |
| **6** | × | × | × | 12 |

| $D$ の値 ($c=2$) | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a \backslash b$ | **3** | **4** | **5** | **6** |
| **2** | − | − | 9 | 20 |
| **3** | − | − | 1 | 12 |
| **4** | × | − | − | 4 |
| **5** | × | × | − | − |
| **6** | × | × | × | − |

$S \leqq \dfrac{1}{24}$ および $D=b^2-4ac>0$ から

$$\frac{(b^2-4ac)^{\frac{3}{2}}}{12a^2} \leqq \frac{1}{24} \quad \text{ゆえに} \quad 0<D \leqq \left(\frac{a^4}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \cdots (*)$$

$a=1$ のとき　$0<\left(\dfrac{a^4}{4}\right)^{\frac{1}{3}}<1$,　　$a=2$ のとき　$1<\left(\dfrac{a^4}{4}\right)^{\frac{1}{3}}<2$,

$a=3$ のとき　$2<\left(\dfrac{a^4}{4}\right)^{\frac{1}{3}}<3$,　　$a=4$ のとき　$\left(\dfrac{a^4}{4}\right)^{\frac{1}{3}}=4$,

$a=5$ のとき　$5<\left(\dfrac{a^4}{4}\right)^{\frac{1}{3}}<6$,　　$a=6$ のとき　$6<\left(\dfrac{a^4}{4}\right)^{\frac{1}{3}}<7$

したがって，$(*)$ をみたす $(a,\ b,\ c)$ の組は，次の 4 組である．

$$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 1),\ (3,\ 5,\ 2),\ (4,\ 6,\ 2),\ (5,\ 5,\ 1)$$

よって，求める確率は　$\dfrac{4}{6^3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{54}}$

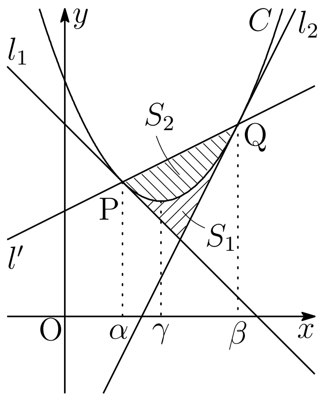
(4) (3) の結果から，$X$ の確率分布表は

| $X$ | 0 | 3 | 5 | 6 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X)$ | $\frac{212}{216}$ | $\frac{1}{216}$ | $\frac{2}{216}$ | $\frac{1}{216}$ | 1 |

よって，求める期待値 $E(X)$ は

$$E(X)=3\times\frac{1}{216}+5\times\frac{2}{216}+6\times\frac{1}{216}=\boldsymbol{\frac{19}{216}}$$

## 解説




$a > 0$，$f(x) = ax^2 + bx + c$ とする．
放物線 $C : y = f(x)$ 上の 2 点 P，Q における接線をそれぞれ $l_1$，$l_2$，2 点 P$(\alpha,\ f(\alpha))$，Q$(\beta,\ f(\beta))$ を通る直線を $l'$ とし $(\alpha < \beta)$，$C$ と $l_1$，$l_2$ で囲まれた図形の面積を $S_1$，$C$ と $l'$ で囲まれた図形の面積を $S_2$ とすると，

$$S_2 = 2S_1$$

が成り立つ．

**証明**　任意の実数 $t$ に対して，テイラー展開[1]により

$$f(x) = f(t) + f'(t)(x-t) + a(x-t)^2 \quad \cdots (*)$$

$l_1$，$l_2$ の方程式は

$$l_1 : y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha), \quad l_2 : y = f'(\beta)(x-\beta) + f(\beta)$$

$l_1$ と $l_2$ の交点の $x$ 座標を $\gamma$ とすると，上の 2 式と $(*)$ により

$$a(\gamma-\alpha)^2 = a(\gamma-\beta)^2 \quad \text{ゆえに} \quad \gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_\alpha^\gamma a(x-\alpha)^2\,dx + \int_\gamma^\beta a(x-\beta)^2\,dx \\ &= \Big[\, \frac{a}{3}(x-\alpha)^3 \,\Big]_\alpha^\gamma + \Big[\, \frac{a}{3}(x-\beta)^3 \,\Big]_\gamma^\beta = \frac{a}{3}(\gamma-\alpha)^3 - \frac{a}{3}(\gamma-\beta) \\ &= \frac{a}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha\right)^3 - \frac{a}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta\right)^3 = \frac{a}{12}(\beta-\alpha)^3 \quad \cdots ① \end{aligned}$$

$l' : y = mx + n$ とすると，2 次方程式 $f(x) - (mx+n) = 0$ は，$\alpha$，$\beta$ を解にもつので，$f(x) - (mx+n) = a(x-\alpha)(x-\beta)$ より

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_\alpha^\beta \{(mx+n) - f(x)\}\,dx \\ &= -\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3 \quad \cdots ② \end{aligned}$$

①，② より　　$S_2 = 2S_1$　　証終

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/chie/taylor.pdf

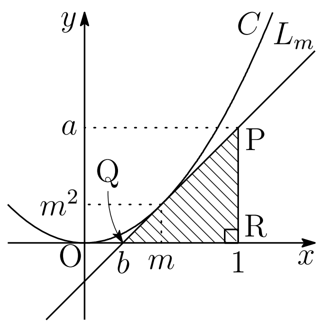
$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $y=x^2$ を微分すると　$y'=2x$

$x=m$ のとき　$y'=2m$

$L_m$ は，点 $(m,\ m^2)$ を通り，傾き $2m$ の直線．

ゆえに　　$y-m^2=2m(x-m)$

よって　　$\boldsymbol{y=2mx-m^2}$




(2) $\mathrm{P}(1,\ a)$，$\mathrm{Q}(b,\ 0)$ は $L_m$ 上の点であるから

$$a=2m\cdot 1-m^2,\quad 0=2mb-m^2$$

よって　$\boldsymbol{a=2m-m^2}$，$\boldsymbol{b=\dfrac{m}{2}}$

(3) $\mathrm{PR}=a=2m-m^2$，$\mathrm{QR}=1-b=1-\dfrac{m}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PQR}&=\frac{1}{2}\mathrm{PR}\cdot\mathrm{QR}\\&=\frac{1}{2}(2m-m^2)\left(1-\frac{m}{2}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{4}(m^3-4m^2+4m)}\end{aligned}$$

(4) (3) の結果から，$S(m)=\dfrac{1}{4}(m^3-4m^2+4m)$ とおくと

$$S'(m)=\frac{1}{4}(3m^2-8m+4)=\frac{1}{4}(m-2)(3m-2)$$

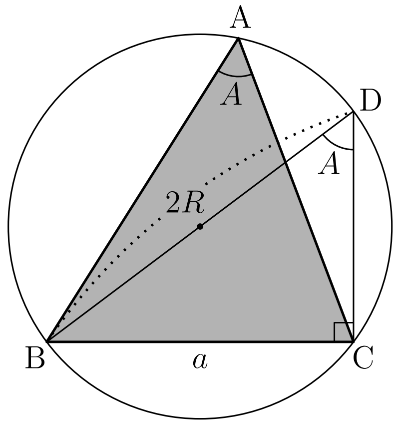
したがって，$S(m)$ の増減表は，次のようになる．

| $m$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{2}{3}$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(m)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $S(m)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{8}{27}$ | $\searrow$ | $\frac{1}{4}$ |

よって，求める三角形 PQR の最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{8}{27}}$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) 右の図で，△ABC の外接円の半径を $R$ とし，線分 BD は △ABC の直径とする．

このとき，円周角と中心角の性質により，




$$\angle\mathrm{BDC} = \angle\mathrm{BAC} = A$$
$$\angle\mathrm{BCD} = 90^\circ$$

が成り立つ．また，$\mathrm{BD} = 2R$ である．

よって，△BCD において

$$a = 2R\sin A$$

が成り立つ．

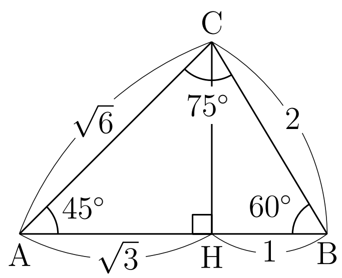
$b = \mathrm{CA}$，$c = \mathrm{AB}$ とおくと，同様に

$$b = 2R\sin B,\quad c = 2R\sin C$$

が成り立つ．よって，次の正弦定理を得る．

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(2) $A = 45^\circ$，$B = 60^\circ$，$C = 75^\circ$，$a = 2$ の △ABC の C から辺 AB に垂線 CH を引くと，$\mathrm{BH} = 1$，$\mathrm{AH} = \mathrm{CH} = \sqrt{3}$ であるから




$$b = \sqrt{6},\quad c = \sqrt{3} + 1$$

△ABC に正弦定理を適用すると

$$\frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sin 75^\circ}$$

ゆえに　$\sin 75^\circ = \dfrac{(\sqrt{3}+1)\sin 45^\circ}{2} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $f(x)=x^3-4x^2+3x$ とおくと　$f'(x)=3x^2-8x+3$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}$

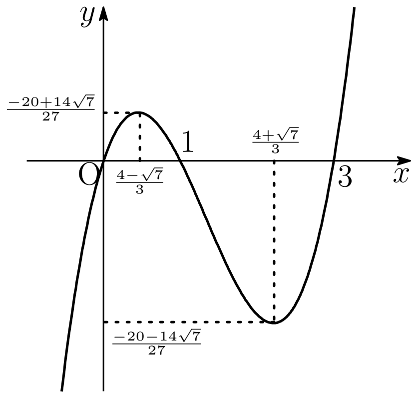
ここで，$f(x)$ を $f'(x)$ で割ると　$f(x)=f'(x)\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{4}{9}\right)-\dfrac{14}{9}x+\dfrac{4}{3}$

したがって

$$f\left(\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}\right)=-\frac{14}{9}\left(\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}\right)+\frac{4}{3}$$
$$=\frac{-20\mp14\sqrt{7}}{27}\quad(\text{複号同順})$$

よって，$f(x)$ の増減表および，そのグラフは，次のようになる．

| $x$ | $\cdots$ | $\frac{4-\sqrt{7}}{3}$ | $\cdots$ | $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y$ | $\nearrow$ | $\frac{-20+14\sqrt{7}}{27}$ | $\searrow$ | $\frac{-20-14\sqrt{7}}{27}$ | $\nearrow$ |




(2) $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

すなわち　$y-(t^3-4t^2+3t)=(3t^2-8t+3)(x-t)$

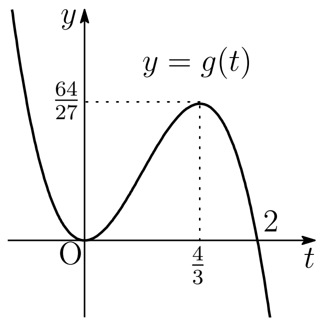
これが点 $(0,\ a)$ を通るから

$$a-(t^3-4t^2+3t)=(3t^2-8t+3)(-t)\quad ゆえに\quad a=-2t^3+4t^2\quad\cdots①$$

ここで，$g(t)=-2t^3+4t^2$ とおくと

$$g'(t)=-6t^2+8t=-2t(3t-4)$$

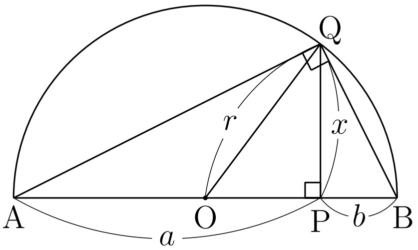
| $t$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{4}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g(t)$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{64}{27}$ | $\searrow$ |




① をみたす $t>0$ の個数が求める接線の本数であるから，
$t>0$ において，$y=g(t)$ と $y=a$ の共有点の個数を求めればよい．

よって　$\begin{cases}\boldsymbol{0<a<\dfrac{64}{27}}\ \textbf{のとき} & \textbf{2 本}\\ \boldsymbol{a\leqq 0,\ a=\dfrac{64}{27}}\ \textbf{のとき} & \textbf{1 本}\\ \boldsymbol{\dfrac{64}{27}<a}\ \textbf{のとき} & \textbf{0 本}\end{cases}$

$\boxed{\mathbf{10}}$ (1) 半円 $C$ の半径を $r$ とすると，
右の図から




$$2r = \mathrm{AB} = \mathrm{AP} + \mathrm{BP}$$

よって $\quad \boldsymbol{r = \dfrac{\mathbf{AP} + \mathbf{BP}}{2}}$

$a = \mathrm{AP}$，$b = \mathrm{BP}$，$x = \mathrm{PQ}$ とし，3 つの直角三角形 APQ，BPQ，ABQ に三平方の定理を適用すると

$$\mathrm{AQ}^2 = a^2 + x^2, \quad \mathrm{BQ}^2 = b^2 + x^2, \quad \mathrm{AQ}^2 + \mathrm{BQ}^2 = (a+b)^2$$

第 1，2 式を第 3 式に代入すると

$$(a^2 + x^2) + (b^2 + x^2) = (a+b)^2 \quad \text{整理すると} \quad x^2 = ab$$

$x > 0$ より $\quad x = \sqrt{ab} \quad$ よって $\quad \mathbf{PQ} = \sqrt{\mathbf{AP{\cdot}BP}}$

別解 $\mathrm{OP} = |a - r|$，$\mathrm{OQ} = r$，$\mathrm{PQ} = x$ より

$$(a-r)^2 + x^2 = r^2 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 = a(2r - a)$$

$2r = a + b$ より $\quad x^2 = ab \quad$ ゆえに $\quad x = \sqrt{ab}$

(2) (1) の結果から $\quad r = \dfrac{a+b}{2}$，$x = \sqrt{ab}$

(1) の図から $\quad r \geqq x \quad$ ゆえに $\quad \dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \quad \cdots (*)$

$(*)$ について，等号が成立するのは，O と P が一致するとき，すなわち，$a = b$ のときである．

$\boxed{\textbf{11}}$ (1) 点 X は線分 AB を $t:1-t$ に内分する点であるから $(0<t<1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=q\overrightarrow{\mathrm{OB_0}}$ を上式に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=(1-t)p\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}+tq\overrightarrow{\mathrm{OB_0}} \quad \cdots ①$$

与えられた条件から

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}+\overrightarrow{\mathrm{OB_0}} \quad \cdots ②$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB_0}}$ は，1 次独立であるから，①，② より

$$(1-t)p=2,\ \ tq=1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{p=\frac{2}{1-t},\ \ q=\frac{1}{t}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OX}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}+\overrightarrow{\mathrm{OB_0}}$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=(1-t)\cdot\frac{2}{1-t}\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}+t\cdot\frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OB_0}}$$

任意の $t$ に対して $(0<t<1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{2}{1-t}\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{OB_0}} \quad \cdots ③$$

となるように A，B を定めると

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \quad \cdots ④$$

となり，点 X は線分 AB を $t:1-t$ に内分する．

(3) 直線 AB が点 X を通るように動くには，③ のようにおけるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=\frac{2}{t(1-t)}\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB_0}}\\&=\frac{2}{-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB_0}}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB_0}}>0$，$0<t<1$ であるから，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は最小となる．このとき，④ より，点 X は線分 AB の中点である．