平成 19 年度　佐賀大学２次試験前期日程 (数学問題)
理工・農・文化教育学部　平成 19 年 2 月 25 日

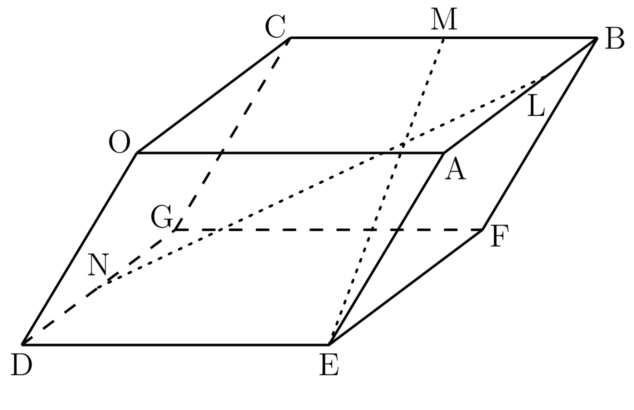
- 理工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B・C(120 分)
- 農学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (120 分)
- 文化教育学部は，$\boxed{7}$ 〜 $\boxed{10}$ 数 I・II・A・B(100 分)

1 平行六面体 OABC-DEFG において，辺 AB を $3:1$ の比に内分する点を L とし，辺 BC，DG の中点をそれぞれ M，N とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおくとき，以下の問に答えよ．

(1) 線分 EM を $t:(1-t)$ の比に分ける点を I とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

(2) 線分 LN を $s:(1-s)$ の比に分ける点を J とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

(3) 線分 EM と線分 LN とが交わることを示し，その交点を H とするとき，比 EH : HM を求めよ．



2 以下の問に答えよ．

(1) $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ とする．角 β が $\alpha - \beta = 90^\circ - \alpha$ を満たすとき，

$$\tan\beta = \frac{\tan^2\alpha - 1}{2\tan\alpha}$$

が成り立つことを示せ．

(2) $a > \dfrac{1}{2}$ とする．$f(x) = x^2 - x + 1$ とし，放物線 $y = f(x)$ の点 $(a,\ f(a))$ における接線を l_1 とする．l_1 と x 軸とのなす角を α $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ とするとき，$\tan\alpha$ を a を用いて表せ．

(3) l_1 に関して直線 $x = a$ と対称な直線を l_2 とするとき，l_2 の方程式を求めよ．

(4) a の値にかかわらず，l_2 は定点を通ることを示し，その座標を求めよ．

3 関数

$$f(x) = 8{\cdot}16^x - 3{\cdot}8^{x+1} + 14{\cdot}4^x + 3{\cdot}2^{x+2} - 9$$

について，以下の問に答えよ．

(1) $2^x = t$ とおいて，$f(x) = g(t)$ となる t の多項式 $g(t)$ を求めよ．

(2) 関数 $g(t)$ $(t > 0)$ のグラフをかけ．

(3) 不等式 $f(x) > 0$ を解け．

4 関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ について，以下の問に答えよ．ただし，$\log x$ は x の自然対数とする．

(1) $f(2)$，$f(3)$，$f(4)$ の大小関係を調べよ．

(2) $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ．

(3) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = \dfrac{\log 2}{2}$ とで囲まれる図形の面積が $\dfrac{3}{2}(\log 2)^2 - \log 2$ であることを示せ．

5 以下の問に答えよ．

(1) $c > 0$，$c \neq 1$ とするとき，$-\log_c x = \log_{\frac{1}{c}} x$ が成り立つことを示せ．

(2) $c > 1$ とするとき，関数 $y = \log_c x$ のグラフをもとにして，関数

$$y = \log_c(x-2) \quad \text{および} \quad y = 2\log_{\frac{1}{c}}(x-2)$$

のグラフをかけ．

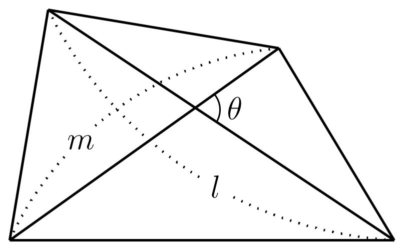
(3) $c > 1$ とするとき，x の不等式 $\log_c x \geqq 2\log_{\frac{1}{c}}(x-2)$ を解け．

6 放物線 $y=x^2$ を C とする．点 $(a,\ a^2-9)$ を通る C の 2 つの接線の接点をそれぞれ A，B とし，2 点 A，B を通る直線を l とする．以下の問に答えよ．

(1) 直線 l の方程式を a を用いて表せ．

(2) l と C とで囲まれる図形の面積が，a の値にかかわらず，一定であることを示せ．

7 右図のような四角形において，対角線の長さを l，m，対角線のなす角を θ とする．次の問いに答えよ．



(1) 四角形の面積 S を l，m，θ を用いて表せ．

(2) 対角線の長さの和が k(定数) となる四角形の中で，その面積が最大となるものの面積を求めよ．

8 次の命題について，真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ．

(1) 有理数と有理数の和は有理数である．

(2) 無理数と無理数の和は無理数である．

(3) 無理数と無理数の積は無理数である．

(4) 無理数の無理数乗は無理数である．

9 p，q を定数とする．数列 $\{a_n\}$ が

$$a_{n+1}=3a_n+pn+q \quad (n=1,2,\cdots)$$

を満たしているとき，次の問いに答えよ．

(1) $a_3-a_2=a_2-a_1$ が成り立つとき，初項 a_1 を p，q を用いて表せ．

(2) (1) の関係が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを証明せよ．

10 a が正の値をとりながら動くとき，

$$I(a)=\int_0^1 |(x-a)(x-2a)|\,dx$$

が最小となる a の値を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OE}} + t\overrightarrow{\mathrm{OM}} = (1-t)(\vec{a}+\vec{d}) + t\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}\right)$

$$= \boldsymbol{\left(1-\frac{1}{2}t\right)\vec{a} + t\vec{c} + (1-t)\vec{d}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OJ}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OL}} + s\overrightarrow{\mathrm{ON}} = (1-s)\left(\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{c}\right) + s\left(\dfrac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)$

$$= \boldsymbol{(1-s)\vec{a} + \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}s\right)\vec{c} + s\vec{d}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \overrightarrow{\mathrm{OJ}}$ とすると，(1)，(2) より

$$1-\frac{1}{2}t = 1-s, \quad t = \frac{3}{4}-\frac{1}{4}s, \quad 1-t = s$$

第 1 式，第 2 式より　$s = \dfrac{1}{3}$，$t = \dfrac{2}{3}$

これは第 3 式もみたす．したがって，線分 EM と線分 LN は交わる．

よって　　$\mathrm{EH} : \mathrm{HM} = t : 1-t = \dfrac{2}{3} : 1-\dfrac{2}{3} = \mathbf{2:1}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1)

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}，\ \tan(90^\circ-\alpha) = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$\alpha-\beta = 90^\circ-\alpha$ であるから

$$\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{1}{\tan\alpha} \quad よって \quad \tan\beta = \frac{\tan^2\alpha - 1}{2\tan\alpha}$$

(2) $f(x) = x^2 - x + 1$ より　$f'(x) = 2x-1$

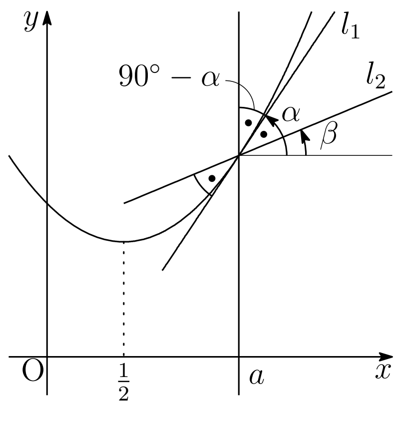
よって　　$\tan\alpha = f'(a) = \boldsymbol{2a-1}$

(3) 右の図のように，x 軸の正の向きと l_2 のなす角を β とすると $(-90^\circ < \beta < 90^\circ)$，

$$\alpha - \beta = 90^\circ - \alpha$$

が成り立つ．したがって，l_2 の傾きは，(1)，(2) の結果から

$$\tan\beta = \frac{(2a-1)^2-1}{2(2a-1)} = \frac{2a(a-1)}{2a-1}$$



したがって，l_2 の方程式は

$$y-(a^2-a+1)=\frac{2a(a-1)}{2a-1}(x-a)$$

よって　$$\boldsymbol{y=\frac{2a(a-1)}{2a-1}x-\frac{a^2-3a+1}{2a-1}}$$

(4) l_2 の方程式を a について整理すると

$$(2x-1)a^2-(2x+2y-3)a+y-1=0$$

これが a に関する恒等式であるとき

$$2x-1=0,\quad 2x+2y-3=0,\quad y-1=0$$

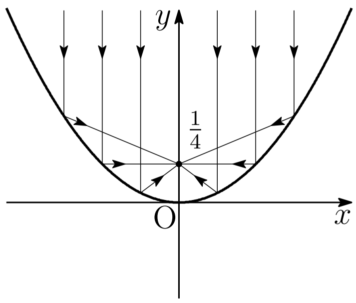
上の 3 式を同時にみたす x，y は　$x=\dfrac{1}{2}$，$y=1$

よって，l_2 は a の値にかかわらず，定点 $\boldsymbol{\left(\frac{1}{2},\ 1\right)}$ を通る．

解説　$y=x^2-x+1$ は放物線 $y=x^2$ を x 軸方向に $\frac{1}{2}$，y 軸方向に $\frac{3}{4}$ だけ平行移動したものである．放物線 $x^2=4\cdot\frac{1}{4}y$ の焦点は

$$\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$$

よって，(4) の定点は，放物線 $y=x^2-x+1$ の焦点である．



$\boxed{\mathbf{3}}$ (1)

$$\begin{aligned} f(x) &= 8\cdot 16^x - 3\cdot 8^{x+1} + 14\cdot 4^x + 3\cdot 2^{x+2} - 9 \\ &= 8(2^x)^4 - 3\cdot 8(2^x)^3 + 14(2^x)^2 + 3\cdot 2^2\cdot 2^x - 9 \\ &= 8t^4 - 24t^3 + 14t^2 + 12 - 9 \end{aligned}$$

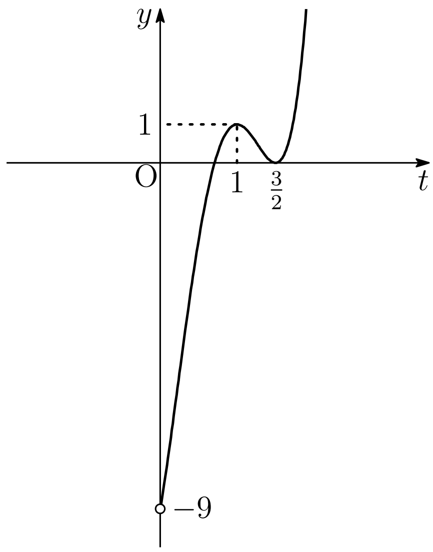
よって　$\boldsymbol{g(t) = 8t^4 - 24t^3 + 14t^2 + 12t - 9}$

(2) $g'(t) = 32t^3 - 72t^2 + 28t + 12$
$\quad = 4(t-1)(2t-3)(4t+1)$

$g(t)$ の増減表は次のようになる $(t > 0)$.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	(-9)	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって，$y = g(t)$ $(t > 0)$ のグラフは，右の図のようになる.



(3) (3) の結果より，$g(\frac{3}{2}) = 0$，$g'(\frac{3}{2}) = 0$ であるから，$g(t)$ は $(2t-3)^2$ を因数にもつことに注意して

$$g(t) = (2t-3)^2\left(2t^2 - 1\right) = 8\left(t - \frac{3}{2}\right)^2\left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$g(t) > 0$ の解は，上式および (3) のグラフにより　$\dfrac{1}{\sqrt{2}} < t < \dfrac{3}{2}$，$\dfrac{3}{2} < t$

よって，$f(x) > 0$ の解は　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{2} < x < \log_2 3 - 1}$，$\boldsymbol{\log_2 3 - 1 < x}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $2\log 2 = \log 4$ より $\dfrac{\log 2}{2} = \dfrac{\log 4}{4}$ ゆえに $f(2) = f(4)$

$3\log 2 < 2\log 3$ より $\dfrac{\log 2}{2} < \dfrac{\log 3}{3}$ ゆえに $f(2) < f(3)$

よって $\boldsymbol{f(2) = f(4) < f(3)}$

(2) $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ を微分すると $f'(x) = \dfrac{1-\log x}{x^2}$

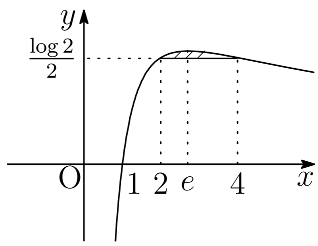
したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

よって $x = e$ のとき**極大値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{e}}$ をとる．

(3) (1) の結果から

$$f(2) = f(4) = \frac{\log 2}{2}$$



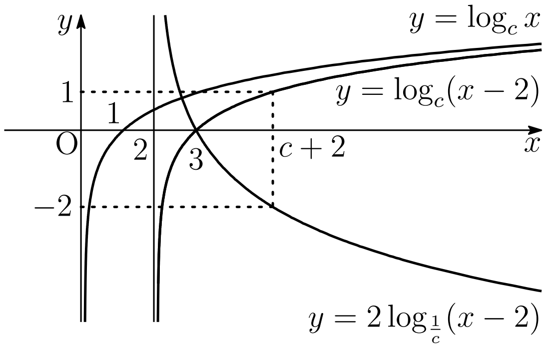
また，(2) の増減表により，求める面積は右の図の斜線部分である．その面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_2^4 \frac{\log x}{x}\,dx - (4-2)\cdot f(2)\\
&= \int_2^4 (\log x)(\log x)'\,dx - 2\cdot\frac{\log 2}{2}\\
&= \Big[\,\frac{1}{2}(\log x)^2\,\Big]_2^4 - \log 2\\
&= \frac{1}{2}(\log 4)^2 - \frac{1}{2}(\log 2)^2 - \log 2\\
&= \frac{1}{2}(2\log 2)^2 - \frac{1}{2}(\log 2)^2 - \log 2\\
&= \frac{3}{2}(\log 2)^2 - \log 2
\end{aligned}$$

注意 (3) の図形の面積を示す問題において結論が示されているので，定積分の計算など途中の計算を省略してはいけない．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 底の変換公式より $\quad \log_{\frac{1}{c}} x = \dfrac{\log_c x}{\log_c \frac{1}{c}} = -\log_c x$

(2) $y = \log_c x \cdots$ ① $y = \log_c(x-2) \cdots$ ②，$y = 2\log_{\frac{1}{c}}(x-2) \cdots$ ③ とおく．
② は ① のグラフを x 軸方向に $+2$ だけ平行移動したもの．
$2\log_{\frac{1}{c}}(x-2) = -2\log_c(x-2)$ であるから，③ は ② を x 軸に関して対称移動し，さらに x 軸をもとに y 軸方向に 2 倍に拡大したものである．



(3) まず，方程式 $\log_c x = 2\log_{\frac{1}{c}}(x-2)$ を解く．
真数は正であるから

$$x > 0 \quad \text{かつ}\ x-2 > 0 \quad \text{すなわち} \quad x > 2$$

方程式から $\quad \log_c x = \log_c \dfrac{1}{(x-2)^2}$

ゆえに $\quad x = \dfrac{1}{(x-2)^2} \quad$ 整理すると $\quad (x-1)(x^2-3x+1) = 0$

$x > 2$ に注意して，これを解くと $\quad x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \cdots$ ④

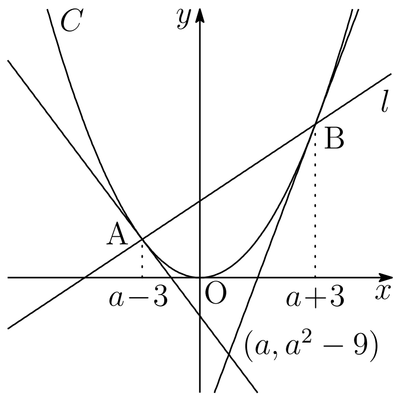
$c > 1$ のとき，不等式

$$\log_c x \geqq 2\log_{\frac{1}{c}}(x-2)$$

の解は，④ と (2) のグラフから

$$\boldsymbol{x \geqq \frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $y=x^2$ より　$y'=2x$



C 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$$y-t^2=2t(x-t)$$
$$y=2tx-t^2$$

これが点 $(a,\ a^2-9)$ を通るとき

$$a^2-9=2ta-t^2$$

これを解いて　$t=a\pm 3$

$\mathrm{A}(a-3,\ (a-3)^2)$，$\mathrm{B}(a+3,\ (a+3)^2)$ とすると，l の方程式は

$$y-(a-3)^2=\frac{(a+3)^2-(a-3)^2}{(a+3)-(a-3)}\{x-(a-3)\}$$

よって　　　$\boldsymbol{y=2ax-a^2+9}$

別解 一般に，点 $(a,\ b)$ を極とする放物線 $x^2=4py$ の極線は　$ax=2p(y+b)$

l は，点 $(a,\ a^2-9)$ を極とする $C:x^2=4\cdot\dfrac{1}{4}y$ の極線であるから

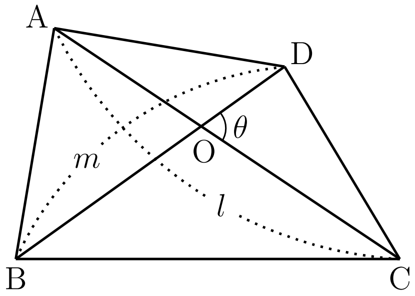
$$ax=2\cdot\frac{1}{4}(y+a^2-9)\quad \text{すなわち}\quad y=2ax-a^2+9$$

(2) l と C とで囲まれる図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_{a-3}^{a+3}\{(2ax-a^2+9)-x^2\}dx\\&=-\int_{a-3}^{a+3}(x-a+3)(x-a-3)\,dx\\&=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{(a+3)-(a-3)\}^3=36\end{aligned}$$

よって，S は a の値にかかわらず一定である．

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 右の図において，$a=\mathrm{OA}$，$b=\mathrm{OB}$，$c=\mathrm{OC}$，$d=\mathrm{OD}$ とおくと



$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}ab\sin\theta,$$
$$\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{2}bc\sin(\pi-\theta)=\frac{1}{2}bc\sin\theta$$
$$\triangle\mathrm{OCD}=\frac{1}{2}cd\sin\theta,$$
$$\triangle\mathrm{ODA}=\frac{1}{2}da\sin(\pi-\theta)=\frac{1}{2}da\sin\theta$$

よって
$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OBC}+\triangle\mathrm{OCD}+\triangle\mathrm{ODA}\\&=\frac{1}{2}(ab+bc+cd+da)\sin\theta\\&=\frac{1}{2}(a+c)(b+d)\sin\theta=\boldsymbol{\frac{1}{2}lm\sin\theta}\end{aligned}$$

(2) 条件より　$l+m=k$

相加平均・相乗平均の関係 $\dfrac{l+m}{2}\geqq\sqrt{lm}$ に上式を代入すると

$$\frac{k}{2}\geqq\sqrt{lm}\quad\text{ゆえに}\quad lm\leqq\frac{k^2}{4}$$

が成り立つ．等号が成立するのは $l=m=\dfrac{k}{2}$ のときである．

よって，$l=m=\dfrac{k}{2}$，$\theta=90^\circ$ のとき面積の最大値 $\boldsymbol{\dfrac{k^2}{8}}$ をとる．

$\boxed{8}$ (1) 真

2 つの有理数を整数 a，b，c，d $(b \neq 0,\ d \neq 0)$ を用いて $\dfrac{a}{b}$，$\dfrac{c}{d}$ とおくと，その和

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

は有理数である．

(2) 偽

［反例］2 つの無理数 $\sqrt{2}$ と $-\sqrt{2}$ の和 0 は有理数である．

(3) 偽

［反例］2 つの無理数 $\sqrt{2}$ と $\sqrt{2}$ の積 2 は有理数である．

(4) 偽

［反例 1］$(\sqrt{2}\,)^{\sqrt{2}}$ を考える．

「$(\sqrt{2}\,)^{\sqrt{2}}$ が有理数」ならば，これが反例を与える．

「$(\sqrt{2}\,)^{\sqrt{2}}$ が無理数」ならば，

$$\left((\sqrt{2}\,)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}\,)^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = (\sqrt{2}\,)^{2} = 2$$

となり，無理数 $(\sqrt{2}\,)^{\sqrt{2}}$ の $\sqrt{2}$ 乗 (無理数乗) が有理数となる．

［反例 2］($\log_2 9$ が無理数であることを用いる)

$$(\sqrt{2})^{\log_2 9} = 3$$

なお，$\log_2 9$ が有理数 $\dfrac{p}{q}$ $(p,\ q$ は整数, $q \neq 0)$ とすると

$$9 = 2^{\frac{p}{q}} \quad \text{すなわち} \quad 3^{2q} = 2^{p}$$

これを満たす整数 p，q はないので，$\log_2 9$ は無理数である．

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $$a_{n+1} = 3a_n + pn + q \quad \cdots(*)$$

$(*)$ に $n = 1,\ 2$ を代入すると

$$a_2 = 3a_1 + p + q \quad \cdots ①$$
$$a_3 = 3a_2 + 2p + q \quad \cdots ②$$

② から ① の辺々を引くと　$a_3 - a_2 = 3(a_2 - a_1) + p$

これに $a_3 - a_2 = a_2 - a_1$ を代入すると

$$a_2 - a_1 = 3(a_2 - a_1) + p \quad \text{ゆえに} \quad a_2 - a_1 = -\frac{p}{2} \quad \cdots ③$$

①，③ より　$\boldsymbol{a_1 = -\frac{3}{4}p - \frac{1}{2}q}$

(2) $(*)$ から　$a_{n+2} = 3a_{n+1} + p(n+1) + q \quad \cdots(**)$

$(**)$ から $(*)$ の辺々を引くと　$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n) + p$

ゆえに　$a_{n+2} - a_{n+1} + \dfrac{p}{2} = 3\left(a_{n+1} - a_n + \dfrac{p}{2}\right)$

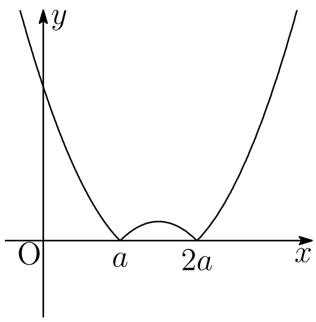
したがって　$a_{n+1} - a_n + \dfrac{p}{2} = 3^{n-1}\left(a_2 - a_1 + \dfrac{p}{2}\right)$

上式に ③ を代入することにより　$a_{n+1} - a_n = -\dfrac{p}{2}$

よって，$\{a_n\}$ は，公差が $-\dfrac{p}{2}$ の等差数列である．

$\boxed{\mathbf{10}}$ $x^2-3ax+2a^2$ の原始関数の 1 つを $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}ax^2+2a^2x$ とおく．

(i) $1 \leqq a$ のとき



$$I(a)=\int_0^1 (x-a)(x-2a)\,dx$$
$$=F(1)-F(0)=2a^2-\frac{3}{2}a+\frac{1}{3}$$
$$I'(a)=4a-\frac{3}{2}>0$$

(ii) $a<1\leqq 2a$ すなわち $\dfrac{1}{2}\leqq a<1$ のとき

$$I(a)=\int_0^a (x-a)(x-2a)\,dx-\int_a^1 (x-a)(x-2a)\,dx$$
$$=2F(a)-F(0)-F(1)=\frac{5}{3}a^3-2a^2+\frac{3}{2}a-\frac{1}{3}$$
$$I'(a)=5a^2-4a+\frac{3}{2}=5\left(a-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{7}{10}>0$$

(iii) $0<2a\leqq 1$ すなわち $0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

$$I(a)=\int_0^a (x-a)(x-2a)\,dx-\int_a^{2a} (x-a)(x-2a)\,dx$$
$$+\int_{2a}^1 (x-a)(x-2a)\,dx$$
$$=2F(a)-F(2a)-F(0)+F(1)=\frac{1}{3}a^3+2a^2-\frac{3}{2}a+\frac{1}{3}$$
$$I'(a)=a^2+4a-\frac{3}{2}$$

このとき，$I'(a)=0$ となるのは　$a=\dfrac{-4+\sqrt{22}}{2}$

(i)，(ii)，(iii) より $I(a)$ の増減表は右のようになる．したがって，$I(a)$ が最小となる a の値は

a	(0)	$\cdots$	$\frac{-4+\sqrt{22}}{2}$	$\cdots$
$I'(a)$		$-$	0	$+$
$I(a)$		↘	極小	↗

$$\boldsymbol{a=\frac{-4+\sqrt{22}}{2}}$$