平成18年度　佐賀大学2次試験前期日程(数学問題)
理工・農・文化教育学部　平成18年2月25日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B・C(120分)
- 農学部は，$\boxed{2}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ 数I・II・A・B (120分)
- 文化教育学部は，$\boxed{8}$ 〜 $\boxed{11}$ 数I・II・A・B(100分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 関数

$$f(x) = ax^2 + 2x + \frac{1}{a} - 2$$

について，以下の問に答えよ．ただし，a は定数で，$a > 1$ とする．

(1) $f(x) > 0$ を満たす x の範囲を求めよ．

(2) $y = f(x)$ のグラフをかけ．

(3) $-2 \leqq x \leqq 1$ において，$y = f(x)$ の最大値 $m(a)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 鋭角三角形 $\triangle$OAB において，頂点 B から辺 OA に下ろした垂線を BC とする．$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) ベクトル $\vec{a}$ の大きさを $|\vec{a}|$ とすると，ベクトル $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ の大きさは 1 であることを示せ．

(2) $|\vec{a}| = 2$ であるとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ を内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を用いて表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と $\vec{a}$ を用いて表せ．

(3) $|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = \sqrt{3}$ であるとき，$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leqq 2\sqrt{3}$ を示せ．

(4) $|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = \sqrt{3}$ であるとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|$ を内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\log x$ を x の自然対数とする．このとき，次の問に答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1) $y = \log x$ を微分せよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \log x\,dx$ を求めよ．

(3) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{e}x - \log x \quad \left(\dfrac{1}{e} \leqq x \leqq e^2\right)$ の増減を調べよ．

(4) xy 平面において，2 直線 $y = \dfrac{1}{e}x$，$x = \dfrac{1}{e}$ と曲線 $y = \log x$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{4}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ について，以下の問に答えよ．

(1) A^2，A^3 を求めよ．

(2) 自然数 n に対して，A^n を求めよ．

(3) $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，$B = PAP^{-1}$ とする．自然数 n に対して，B^n を求めよ．

$\boxed{5}$ 円に内接する五角形 ABCDE において，AB $= 7$，BC $= 3$，CD $= 5$，DE $= 6$，$\angle$BCD $= 120^\circ$ とする．以下の問に答えよ．

(1) BD の長さを求めよ．

(2) $\angle$BAD の大きさを求めよ．

(3) AE の長さを求めよ．

$\boxed{6}$ 数列 $\{a_n\}$ において，$b_n = \log_5 a_n$ として得られる数列 $\{b_n\}$ が公差 2 の等差数列であるとする．このとき，以下の問に答えよ．ただし $a_1 = \dfrac{1}{3}$ である．

(1) 一般項 b_n を求めよ．

(2) 一般項 a_n を求めよ．

(3) 初項から第 $3n$ 項までの和 $S_{3n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{3n} a_k$ を求めよ．

(4) 数学的帰納法を用いて，(3) で求めた和 S_{3n} が整数であること示せ．

$\boxed{7}$ 関数

$$f(x) = 2x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

について，以下の問に答えよ．

(1) $f(x) > 0$ を満たす x の範囲を求めよ．

(2) $y = f(x)$ のグラフをかけ．

(3) $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx$ を求めよ．

$\boxed{8}$ (1) 正の数 p，q に対して不等式

$$\frac{p+q}{2} \geqq \sqrt{pq}$$

が成り立つことを証明せよ．さらに，等号が成り立つのはどのような場合であるか述べよ．

(2) 同一直線上にない 3 点 O，A，B があり，点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 2a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

を満たす．ただし，$a > 0$，$b > 0$ とする．直線 OP と直線 AB との交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を a，b，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(3) 上の (2) において a と b が $a > 0$，$b > 0$，$ab = 1$ を満たしながら動くとき，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}$ を最小とする a，b を求めよ．

$\boxed{9}$ a を定数とする．$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，関数 $y = -4^{-x} + a{\cdot}2^{-x} + 2$ が最大となる x の値と，そのときの最大値を求めよ．

$\boxed{10}$ 関数 $f(x)$ が等式

$$f(x) = x^2 - x\int_0^1 f(t)\,dt + 2\int_1^x f'(t)\,dt$$

を満たすとき次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ は 2 次関数であることを示せ．

(2) $f(x)$ を求めよ．

$\boxed{11}$ n は自然数とする．次の問いに答えよ．

(1) 等式

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

を証明せよ．

(2) $2n+1$ 個の項からなる公差 1 の等差数列を考える．初項から $n+1$ 個の項の平方の和と，その後に続く n 個の項の平方の和が等しいとき，この数列の初項を n を用いて表せ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)>0$ より $\qquad ax^2+2x+\dfrac{1}{a}-a>0$

$a>0$ であるから $\qquad x^2+\dfrac{2}{a}x+\dfrac{1}{a^2}-1>0$

したがって $\qquad \left(x+\dfrac{1}{a}+1\right)\left(x+\dfrac{1}{a}-1\right)>0$

よって $\qquad \boldsymbol{x<-\dfrac{1}{a}-1,\quad -\dfrac{1}{a}+1<x}$

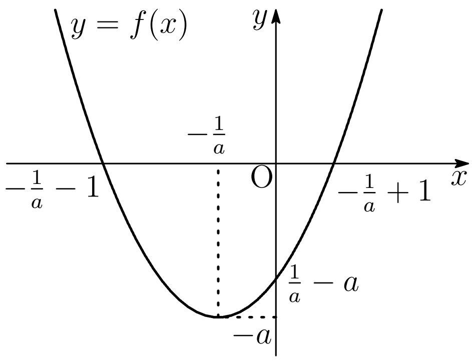
(2) $f(x)=a\left(x+\dfrac{1}{a}\right)^2-a$ であるから，

$y=f(x)$ は

$$\left(-\frac{1}{a},-a\right)$$

を頂点とする下に凸の放物線.

グラフは，右の図のようになる.



(3) 放物線 $y=f(x)$ の軸は $\quad x=-\dfrac{1}{a}$

$-2\leqq x\leqq 1$ の中央は $\quad x=-\dfrac{1}{2}$

(i) $-\dfrac{1}{2}<-\dfrac{1}{a}$ 　すなわち　$a>2$ のとき

$$m(a)=f(-2)=3a+\frac{1}{a}-4$$

(ii) $-\dfrac{1}{a}\leqq-\dfrac{1}{2}$ 　すなわち　$1<a\leqq 2$ のとき

$$m(a)=f(1)=2+\frac{1}{a}$$

$$\boldsymbol{m(a)=\begin{cases} 2+\dfrac{1}{a} & (1<a\leqq 2 \text{ のとき}) \\ 3a+\dfrac{1}{a}-4 & (2<a \text{ のとき}) \end{cases}}$$

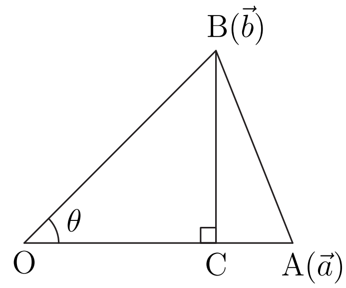
解説 2 次関数 (下に凸の放物線) の閉区間における最大値[1]は
定義域の中央が軸より左側にあるとき定義域の左端で最大値をとり，
定義域の中央が軸より右側にあるとき定義域の右端で最大値をとる.

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_bun_2008.pdf の $\boxed{\mathbf{1}}$ を参照.

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\vec{e}=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ とおくと　$|\vec{e}|^2=\vec{e}\cdot\vec{e}=\dfrac{1}{|\vec{a}|^2}\vec{a}\cdot\vec{a}=1$

したがって　$|\vec{e}|=1$　よって　$\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ の大きさは 1

(2) $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ (鋭角) とすると



$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\,\vec{b}\,|\cos\theta$$

これに $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\cdots$ ① を代入すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$$

上式および (1) の結果から ($\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $\vec{e}$ の向きは同じ)

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\vec{e}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$$

$|\vec{a}|=2$ であるから　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{2}}$，　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{4}\vec{a}}$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ より　　$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta|\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$ であるから　　$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqq2\sqrt{3}$

(4) $|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|=|\vec{b}|\sin\theta$ であるから，① より

$$|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|=|\,\vec{b}\,|\sqrt{1-\cos^2\theta}=|\,\vec{b}\,|\sqrt{1-\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{|\vec{a}|}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$ であるから　　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{12-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}$

$\boxed{3}$ (1) $\boldsymbol{y' = \dfrac{1}{x}}$

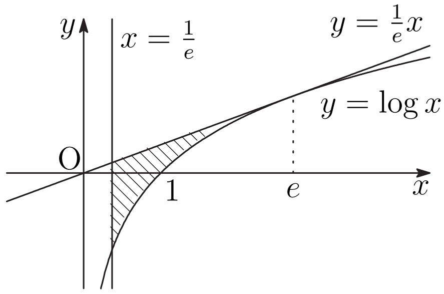
(2) $\displaystyle\boldsymbol{\int \log x\,dx = x\log x - x + C}$ **(C は積分定数)**

(3) $f(x)$ を微分すると　　$f'(x) = \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-e}{ex}$

よって，$f(x) = \dfrac{1}{e}x - \log x \ \left(\dfrac{1}{e} \leqq x \leqq e^2\right)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	e	$\cdots$	e^2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{e^2}+1$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$e-2$

(4) $y = \dfrac{1}{e}x$ は，曲線 $y = \log x$ の点 $(e,\ 1)$ における接線．求める面積を S とすると



$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left(\frac{1}{e}x - \log x\right) dx \\
&= \left[\ \frac{x^2}{2e} - x\log x + x\ \right]_{\frac{1}{e}}^{e} \\
&= \boldsymbol{\frac{e}{2} - \frac{1}{2e^3} - \frac{2}{e}}
\end{aligned}
$$

$\boxed{4}$ (1) $$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

ゆえに　$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

(2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると，$A = E + B$，$B^2 = O$ であるから

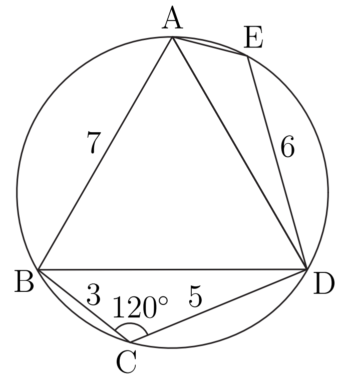
$$\begin{aligned} A^n &= (E+B)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k B^k = E + nB \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{2n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

解説 (1) の結果から A^n を推測し，数学的帰納法を用いてもよい.

(3) $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，$P = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，$B = PAP^{-1}$ より

$$\begin{aligned} B^n &= (PAP^{-1})^n \\ &= (PAP^{-1})(PAP^{-1})\cdots(PAP^{-1}) \\ &= PA^nP^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{-2n+1} & \boldsymbol{4n} \\ \boldsymbol{-n} & \boldsymbol{2n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) △BCD に余弦定理を適用すると



$$\begin{aligned}BD^2 &= 3^2+5^2-2{\cdot}3{\cdot}5\cos 120^\circ\\ &= 49\end{aligned}$$

BD >0 であるから　**BD = 7**

(2) 四角形 ABCD は円に内接しているので，対角の和は 180°．したがって

$$\angle\mathrm{BAD} = 180^\circ - \angle\mathrm{BCD} = \mathbf{60^\circ}$$

(3) (1) の結果から AB = BD の二等辺三角形であるから　$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{BDA}$

さらに，(2) の結果により　$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{BDA} = 60^\circ$

したがって，△ABD は正三角形である．

また，四角形 ABDE も円に内接するので

$$\angle\mathrm{AED} = 180^\circ - \angle\mathrm{ABD} = 120^\circ$$

$x=\mathrm{AE}$ とおいて，△ADE に余弦定理を適用すると

$$7^2 = 6^2+x^2-2{\cdot}6{\cdot}x\cos 120^\circ \quad \text{ゆえに} \quad x^2+6x-13=0$$

$x>0$ に注意して，これを解くと　$\mathbf{AE = -3+\sqrt{22}}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\{b_n\}$ は，初項が $b_1 = \log_5 a_1 = -\log_5 3$，公差が 2 の等比数列であるから

$$b_n = -\log_5 3 + 2(n-1) = \boldsymbol{2n-2-\log_5 3}$$

(2) (1) の結果から　$b_n = \log_5\left(\dfrac{1}{3}{\cdot}5^{2n-2}\right)$　　よって　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{3}{\cdot}25^{n-1}}$

(3) (2) の結果から

$$S_{3n} = \sum_{k=1}^{3n} a_k = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3n} 25^{k-1} = \frac{1}{3}\times\frac{25^{3n}-1}{25-1} = \boldsymbol{\frac{1}{72}(25^{3n}-1)}$$

(4) $S_{3n}=\dfrac{1}{72}(25^{3n}-1)$ は整数である．　$\cdots(*)$

［1］$n=1$ のとき

$$\frac{1}{72}(25^3-1)=\frac{1}{72}(25-1)(25^2+25+1)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 651=217$$

よって，$n=1$ のとき，$(*)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$S_{3(k+1)}=\frac{1}{72}\{25^{3(k+1)}-1\}$$
$$=\frac{1}{72}\{25^3(25^{3k}-1)+(25^3-1)\}$$
$$=25^3S_{3k}+S_3$$

よって，S_{3k}，S_3 が整数であるから，$S_{3(k+1)}$ も整数である．

［1］，［2］より，すべての自然数 n に対して，S_{3n} は整数である．

補足 $5^2\equiv 1\pmod 8$，$5^6\equiv 1\pmod 9$ であるから，自然数 n に対して

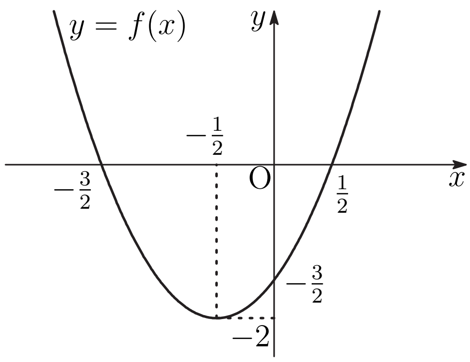
$$5^{6n}\equiv 1\pmod 8,\quad 5^{6n}\equiv 1\pmod 9$$

したがって，$5^{6n}-1=25^{3n}-1$ は $8\times 9=72$ で割り切れる．

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $f(x)>0$ より　$4x^2+4x-3>0$

したがって　$(2x+3)(2x-1)>0$

よって　$\boldsymbol{x<-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}<x}$



(2) $f(x)=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-2$ であるから

$y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる．

(3) $f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)=\dfrac{2}{3}x^3+x^2-\dfrac{3}{2}x$ とおくと，(2) の結果から

$$\int_0^1|f(x)|\,dx=-\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx$$
$$=-\Big[\,F(x)\,\Big]_0^{\frac{1}{2}}+\Big[\,F(x)\,\Big]_{\frac{1}{2}}^1=F(1)-2F\left(\frac{1}{2}\right)=\mathbf{1}$$

$\boxed{8}$ (1) $$\frac{p+q}{2}-\sqrt{pq}=\frac{1}{2}(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2 \geqq 0$$

よって $\dfrac{p+q}{2} \geqq \sqrt{pq}$ (等号が成立するのは $p=q$ のとき)

(2) $$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2a+b)\frac{2a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2a+b}$$

$a>0$，$b>0$ より，$\dfrac{2a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2a+b}$ は線分 AB 上の位置ベクトルである．

よって $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{2a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2a+b}}$

(3) (2) の結果から $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2a+b)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

a，$b>0$ より $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=(2a+b)|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ ゆえに $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}=2a+b$

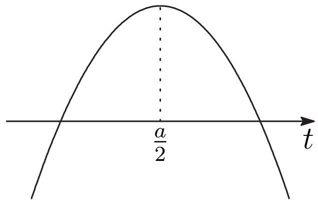
$$2a+b \geqq 2\sqrt{2a\cdot b}=2\sqrt{2}$$

上式の等号が成立するのは $2a=b$ のときであるから，$ab=1$ より

$$a\cdot 2a=1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a=\frac{1}{\sqrt{2}},\ b=\sqrt{2}}$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ $t=2^{-x}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$，$y=f(t)$ とおくと

$$f(t) = -t^2 + at + 2 \quad \left(\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1\right)$$
$$= -\left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + 2$$



$f(t)$ の最大値を M とすると

(i) $1 < \dfrac{a}{2}$ のとき　$M = f(1) = a + 1$

$t = 1$ のとき　$2^{-x} = 1$　すなわち　$x = 0$

(ii) $\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{a}{2} \leqq 2$ のとき　$M = f\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{a^2}{4} + 2$

$t = \dfrac{a}{2}$ のとき　$2^{-x} = \dfrac{a}{2}$　すなわち　$x = 1 - \log_2 a$

(iii) $\dfrac{a}{2} < \dfrac{1}{2}$ のとき　$M = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{a}{2} + \dfrac{7}{4}$

$t = \dfrac{1}{2}$ のとき　$2^{-x} = \dfrac{1}{2}$　すなわち　$x = 1$

よって，y の最大値とそのときの x の値は

$2 < a$ のとき　$\boldsymbol{a + 1}$　$\boldsymbol{(x = 0)}$

$1 \leqq a \leqq 2$ のとき　$\boldsymbol{\dfrac{a^2}{4} + 2}$　$\boldsymbol{(x = 1 - \log_2 a)}$

$a < 1$ のとき　$\boldsymbol{\dfrac{a}{2} + \dfrac{7}{4}}$　$\boldsymbol{(x = 1)}$

$\boxed{\mathbf{10}}$ (1) 等式 $f(x)=x^2-x\int_0^1 f(t)\,dt+2\int_1^x f'(t)\,dt$ から

$$f(x)=x^2-x\int_0^1 f(t)\,dt+2\{f(x)-f(1)\}$$

したがって　$f(x)=-x^2+x\int_0^1 f(t)\,dt+2f(1)$

ここで，$a=\int_0^1 f(t)\,dt$，$b=f(1)$ とおくと (a，b は定数)

$$f(x)=-x^2+ax+2b$$

よって，$f(x)$ は2次関数である．

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} a&=\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1(-t^2+at+2b)\,dt\\ &=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2+2bt\right]_0^1=-\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+2b,\\ b&=f(1)=-1+a+2b \end{aligned}$$

整理すると　$a-4b=-\dfrac{2}{3}$,　$a+b=1$

これを解いて　$a=\dfrac{2}{3}$，$b=\dfrac{1}{3}$　よって　$\boldsymbol{f(x)=-x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3}}$

$\boxed{\mathbf{11}}$ (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^n k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\{k(k+1)-(k-1)k\}=\frac{1}{2}n(n+1)$

(2) 初項を a，第 $n+1$ を m とすると　$a=m-n$　$\cdots$①

条件から　$\displaystyle\sum_{k=1}^n(m-k)^2+m^2=\sum_{k=1}^n(m+k)^2$

整理すると　$\displaystyle m^2=4m\sum_{k=1}^n k$

これに (1) の結果を代入すると

$$m^2=4m\times\frac{1}{2}n(n+1)\quad \text{ゆえに}\quad m\{m-2n(n+1)\}=0$$

したがって　$m=0,\ 2n(n+1)$　①より　$\boldsymbol{a=-n,\ n(2n+1)}$