平成17年度　佐賀大学２次試験前期日程 (数学問題)
理工・農・文化教育学部　平成17年2月25日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B(120分)
- 農学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数I・II・A・B (120分)
- 文化教育学部は，$\boxed{7}$ 〜 $\boxed{10}$ 数I・II・A・B(100分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 1からnまでの自然数のうちで，nと互いに素であるものの個数を$\varphi(n)$とする．ただし，自然数aとbが互いに素であるとは，aとbの最大公約数が1になることである．

(1) $\varphi(10)$を求めよ．

(2) pを素数，kを自然数とするとき，$\varphi(p^k)$を求めよ．

(3) $\varphi(100)$を求めよ．

(4) $\varphi(1500)$を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 複素数zとwの間に$w=(1+\sqrt{3}\,i)z$という関係があるとき，以下の問に答えよ．ただし，iは虚数単位とする．

(1) $z \neq 0$のとき，複素数平面の原点Oとz，wを頂点とする三角形はどんな形の三角形か．

(2) 複素数平面上の2点$\sqrt{3}\,i$と-3を通る直線の上をzが動くとき，wが描く図形の概形とwが満たす方程式を求めよ．

(3) zが$\sqrt{3}\,i$を中心とする半径$\sqrt{3}$の円周上を動くとき，wが描く図形の概形とwが満たす方程式を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 以下の問に答えよ．

(1) $y=x^2-2x+1$の接線で原点$(0,\ 0)$を通るものを求めよ．

(2) $y=\sin x^2$を微分せよ．

(3) $y=x^{\cos x}$ $(x>0)$を微分せよ．

(4) 不定積分$\displaystyle\int x\sqrt{x-1}\,dx$を求めよ．

(5) 定積分$\displaystyle\int_1^e \log x\,dx$を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 相異なる正数a，bに対して

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{(t+a)^2}\,dt,\quad g(x)=\int_0^x \frac{1}{(t+a)(t+b)}\,dt$$

とおくとき，以下の問に答えよ．

(1) $x\to+\infty$のときの$f(x)$の極限値Aおよび$g(x)$の極限値Bを求めよ．

(2) $b\to a$のときのBの極限値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\theta=120^\circ$とし，数列$a_n=2^{n-1}\cos(n\theta)$の初項から第n項までの和$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$を$S_n$とするとき，以下の問に答えよ．

(1) 自然数mに対し，a_{3m}，a_{3m-1}，a_{3m-2}を求めよ．

(2) 自然数mに対し，S_{3m}，S_{3m-1}，S_{3m-2}を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ A(2, 1)，B(1, −1)，C(0, 1)とする．$0\leqq t\leqq 1$に対して線分ABを$t:1-t$の比に内分する点をP，線分BCを$t:1-t$の比に内分する点をQ，線分PQを$t:1-t$の比に内分する点をRとする．このとき以下の問に答えよ．

(1) Pの座標をtを用いて表せ．

(2) Rの軌跡を求めよ．

(3) 線分AB，BCと(2)で求めた軌跡によって囲まれた図形の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 実数x_1，x_2，y_1，y_2が不等式$x_1\geqq x_2$と$y_1\geqq y_2$および等式$x_1+x_2=y_1+y_2$を満たすとする．さらに，不等式$x_1\leqq y_1$が成り立つとき，x_1x_2とy_1y_2の大小を調べよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 正の実数aに対して，複素数平面上で式$|z-(1+i)a|=a$を満たす複素数zの表す点全体からなる図形をC_1とする．また，複素数zの表す点が図形C_1全体の上を動くとき，式$w=\dfrac{1}{z}$を満たす複素数wの表す点全体からなる図形をC_2とする．2つの図形C_1とC_2の共有点の個数を求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ nを自然数とする．2次関数$y=f(x)$のグラフCは2点$(0,\ 0)$，$(n,\ 0)$を通り，Cの頂点は第1象限にあり，また，Cとx軸とで囲まれた部分の面積Sは$S=n\left(\frac{1}{2}\right)^n$を満たしている．このとき，次の問いに答えよ．

(1) グラフCの頂点のy座標をqとおくとき，qをnの式で表せ．

(2) 自然数nで(1)のqが$\dfrac{3}{512}<q<\dfrac{3}{64}$を満たすものをすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{10}}$ aを実数とする．関数$f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2+a-3)x$が区間$x>2$で極値をもたないような$a$の値の範囲を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 1 から 10 までの自然数のうち，10 と互いに素である数は

$$1,\ \ 3,\ \ 7,\ \ 9$$

よって　$\boldsymbol{\varphi(10) = 4}$

(2) 1 から p^k までの自然数のうち (p は素数)，p^k と互いに素でない数は，p の倍数の $\dfrac{p^k}{p}$ 個であるから

$$\varphi(p^k) = p^k - \frac{p^k}{p} = \boldsymbol{p^k - p^{k-1}}$$

(3) $100 = 2^2 \times 5^2$

1 から 100 までの自然数の中で，2 の倍数，5 の倍数の集合をそれぞれ A，B とすると

$$n(A) = \frac{100}{2} = 50, \quad n(B) = \frac{100}{5} = 20, \quad n(A \cap B) = \frac{100}{10} = 10$$

ゆえに　$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 50 + 20 - 10 = 60$

よって　$\varphi(100) = 100 - n(A \cup B) = 100 - 60 = \mathbf{40}$

(4) $1500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^3$

1 から 1500 までの自然数の中で，2 の倍数，3 の倍数，5 の倍数の集合をそれぞれ X，Y，Z とすると

$$n(X) = \frac{1500}{2} = 750, \quad n(Y) = \frac{1500}{3} = 500, \quad n(Z) = \frac{1500}{5} = 300$$
$$n(X \cap Y) = \frac{1500}{6} = 250, \quad n(Y \cap Z) = \frac{1500}{15} = 100$$
$$n(Z \cap X) = \frac{1500}{10} = 150, \quad n(X \cap Y \cap Z) = \frac{1500}{30} = 50$$

したがって

$$\begin{aligned} n(X \cup Y \cup Z) &= n(X) + n(Y) + n(Z) - n(X \cap Y) - n(Y \cap Z) \\ &\qquad - n(Z \cap X) + n(X \cap Y \cap Z) \\ &= 750 + 500 + 300 - 250 - 100 - 150 + 50 = 1100 \end{aligned}$$

よって　$\varphi(1500) = 1500 - n(X \cup Y \cup Z) = 1500 - 1100 = \mathbf{400}$

解説

1からnまでの自然数のうちで，nと互いに素であるものの個数を表す関数$\varphi(n)$を，オイラーのトーシェント関数 (Euler's totient function) またはφ関数 (phi function) という．(2) の結果から，pを素数，kを自然数とするとき，次式が成り立つ．

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

定理 1

p，qを素数，k，lを自然数，$n = p^k q^l$とするとき

$$\varphi(n) = \varphi(p^k)\varphi(q^l) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

証明 1からnまでの自然数のうちで，p，q，pqで割り切れる個数は，それぞれ$\dfrac{n}{p}$，$\dfrac{n}{q}$，$\dfrac{n}{pq}$であるから，pまたはqで割り切れる個数は

$$\frac{n}{p} + \frac{n}{q} - \frac{n}{pq}$$

よって
$$\begin{aligned}\varphi(n) &= n - \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{q} - \frac{n}{pq}\right) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right)\\ &= p^k q^l\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right) = \varphi(p^k)\varphi(q^l)\end{aligned}$$

証終

補題 $\varphi(90) = \varphi(9)\varphi(10)$を示せ．

証明 10行9列の数の並びについて，第i行第j列を$9i + 10j$とすると，次のページの表1のようになる．また，$9i + 10j$を90で割った余り (ただし割り切れるときは，便宜上90とする) を求めると，表2のようになる．

表2からもわかるように，$9i + 10j$ $(1 \leqq i \leqq 10,\ 1 \leqq j \leqq 9)$ の値は，法90について，どの2つも合同ではない．仮に，$1 \leqq i, i' \leqq 10,\ 1 \leqq j, j' \leqq 9$ に対して

$$9i + 10j \equiv 9i' + 10j' \quad すなわち \quad 9(i - i') \equiv 10(j' - j) \pmod{90}$$

が成立するとき
$$\begin{aligned}9(i - i') &\equiv 0 \pmod{10}\\ 10(j' - j) &\equiv 0 \pmod{9}\end{aligned}$$

$-9 \leqq i - i' \leqq 9$，$-8 \leqq j' - j \leqq 8$ であるから　$i = i'$，　$j = j'$

したがって，表 2 には，1 から 90 までの自然数が 90 個並ぶ．

$9i+10j$ の値 (表 1)

i \ j	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	19	29	39	49	59	69	79	89	99
2	28	38	48	58	68	78	88	98	108
3	37	47	57	67	77	87	97	107	117
4	46	56	66	76	86	96	106	116	126
5	55	65	75	85	95	105	115	125	135
6	64	74	84	94	104	114	124	134	144
7	73	83	93	103	113	123	133	143	153
8	82	92	102	112	122	132	142	152	162
9	91	101	111	121	131	141	151	161	171
10	100	110	120	130	140	150	160	170	180

$9i+10j$ を 90 で割った余り (表 2)

i \ j	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	19	29	39	49	59	69	79	89	9
2	28	38	48	58	68	78	88	8	18
3	37	47	57	67	77	87	7	17	27
4	46	56	66	76	86	6	16	26	36
5	55	65	75	85	5	15	25	35	45
6	64	74	84	4	14	24	34	44	54
7	73	83	3	13	23	33	43	53	63
8	82	2	12	22	32	42	52	62	72
9	1	11	21	31	41	51	61	71	81
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90

$90=9\times 10$ で 9 と 10 は互いに素であるから，1 から 90 までの自然数のうち，90 と互いに素である数は 9 または 10 と互いに素である．

表 2 の 1 から 90 までの自然数のうち，9 と互いに素でない数は，すべて 3 列目，6 列目，9 列目に並び，それ以外の列数は $\varphi(9)$．また，1 から 90 までの自然数のうち，10 と互いに素でない数は，すべて 2 行目，4 行目，5 行目，6 行目，8 行目，10 行目に並び，それ以外の行数は $\varphi(10)$．そこで，これらの数を除いた，すなわち互いに素であるものを残したものが左下の表である．さらに，これらの数の間を詰めて並べたものが右下の表で，数字が書かれた列数は $\varphi(9)$，数字が書かれた行数は $\varphi(10)$．

よって，$\varphi(90)=\varphi(9)\varphi(10)$ が成り立つ．

19	29		49	59		79	89	
37	47		67	77		7	17	
73	83		13	23		43	53	
1	11		31	41		61	71	

19	29	49	59	79	89			
37	47	67	77	7	17			
73	83	13	23	43	53			
1	11	31	41	61	71			

証終

補題の証明を一般化することにより，次の定理を得る．

定理 2

自然数 m，n が互いに素であるとき，次式が成り立つ．

$$\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$$

定理 3

p_1, $p_2, \cdots, p_l$ を素数，k_1, $k_2, \cdots, k_l$ を自然数とすると

$$n = {p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\cdots{p_l}^{k_l}$$

について，次式が成り立つ．

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_l}\right)$$

証明 定理 2 の乗法的性質を用いると

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \varphi({p_1}^{k_1})\varphi({p_2}^{k_2})\cdots\varphi({p_l}^{k_l}) \\ &= {p_1}^{k_1}\left(1-\frac{1}{p_1}\right){p_2}^{k_2}\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots{p_l}^{k_l}\left(1-\frac{1}{p_l}\right) \\ &= n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_l}\right)\end{aligned}$$

証終

定理 4 フェルマー・オイラーの定理 (Fermat-Euler Theorem)

自然数 n と互いに素である自然数 a について，次式が成り立つ．

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

証明 n 以下の自然数で n と互いに素である数を

$$r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_{\varphi(n)} \tag{1}$$

とする．これらに n と互いに素である自然数 a を掛けた数

$$ar_1,\ ar_2,\ \cdots,\ ar_{\varphi(n)} \tag{2}$$

は，どの 2 つも法 n について合同でない．$ar_i \equiv ar_j$ と仮定すると，$a(r_i - r_j) \equiv 0$ より，$r_i \equiv r_j$．ゆえに，法 n に関して，(1) と (2) は順序を無視すると一致する．したがって，(1) をすべて掛け合わせたものと (2) をすべて掛け合わせたものは合同である．すなわち

$$a^{\varphi(n)}r_1r_2\cdots r_{\varphi(n)} \equiv r_1r_2\cdots r_{\varphi(n)} \pmod{n}$$

ゆえに $$r_1r_2\cdots r_{\varphi(n)}(a^{\varphi(n)}-1) \equiv 0 \pmod{n}$$

よって $$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

とくに，n が素数 p のとき (フェルマーの小定理) $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ **証終**

定理 5

自然数 n と互いに素である自然数 a について

$$a^e \equiv 1 \pmod{n}$$

を満たす最小の自然数 e(**位数**) は，$\varphi(n)$ の約数である．

証明 $\varphi(n)$ が e で割り切れないと仮定し，$\varphi(n)$ を e で割った商を q，余りを r とすると

$$\varphi(n) = eq + r \quad (0 < r < e)$$

したがって $$a^{\varphi(n)} = a^{eq+r} = (a^e)^q a^r$$

$a^{\varphi(n)} \equiv 1$，$a^e \equiv 1 \pmod{n}$ であるから

$$a^r \equiv 1 \qquad \pmod{n}$$

これは，e の最小性に反する． **証終**

例 1 素数 13 を法とする剰余系から 0 を除いた数 n の位数 e を調べる．

n	n^2	n^3	n^4	n^5	n^6	n^7	n^8	n^9	n^{10}	n^{11}	n^{12}
1											1
2	4	8	3	**6**	12	**11**	9	5	10	**7**	1
3	9	1									1
4	3	12	9	10	1						1
5	12	8	1								1
6	10	8	9	**2**	12	**7**	3	5	4	**11**	1
7	10	5	9	**11**	12	**6**	3	8	4	**2**	1
8	12	5	1								1
9	3	1									1
10	9	12	3	4	1						1
11	4	5	3	**7**	12	**2**	9	8	10	**6**	1
12	1										1

したがって

n	1	**2**	3	4	5	**6**	**7**	8	9	10	**11**	12
e	1	12	3	6	4	12	12	4	3	6	12	2

これらの位数は $\varphi(13) = 12$ の約数である．

素数pについて，$a^e \equiv 1$となる位数eが$p-1$に等しいとき，aを法pの**原始根**という．このとき

$$1,\ a,\ a^2,\ \cdots,\ a^{p-2}$$

は法pに関して，どの2つも合同ではない．

実際，$1 \leqq i < j \leqq p-1$のとき$a^i \equiv a^j \pmod p$とすると

$$a^i(a^{j-i}-1) \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad a^{j-i} \equiv 1 \pmod p$$

$1 \leqq j-i \leqq p-2$であるから，aが法pの原始根であることに反する． ■

余談 時計の長針が12時を指しているときk時間ごとに時刻を確認するとき，kが12と互いに素である，すなわち，$k=1,\ 5,\ 7,\ 11$のとき，長針が1〜12のすべての時刻を指すことを経験的に知っている．

九九の計算で，10と互いに素である1，3，7，9の段の答が法10に関する剰余系をなすことを知っている (一位の数に1〜9までのすべての数が現れる)．

整数の集合を法mに関して合同であるものを分類すると，m個の類 (クラス) に分かれる．これらの類を**剰余類**といい，この各類から一つずつ元を取り出した組を**剰余系**という．例えば，$m=5$のとき，$\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，$\{5,\ 6,\ 7, -2, -1\}$などがその剰余系をなす．法mに関する剰余類のうち，mと互いに素である剰余類を**既約剰余類**という．例えば，$m=12$のとき，$\{1,\ 5,\ 7,\ 11\}$はその**既約剰余系**をなす．

例1の結果から，13の原始根は2，6，7，11である．13の原始根の一つをaとすると，aは例1の表のn，n^5，n^7，n^{11}の列に現れる．aがn^5の列にあるとき

$$\{n^5,\ (n^5)^2,\ (n^5)^3,\ (n^5)^4,\ (n^5)^5,\ (n^5)^6,\ (n^5)^7,\ (n^5)^8,\ (n^5)^9,\ (n^5)^{10},\ (n^5)^{11}\}$$

このとき，$n^{12} \equiv 1 \pmod{13}$であるから，次のとおり，$a$は

$$\{n^5,\ n^{10},\ n^3,\ n^8,\ n,\ n^6,\ n^{11},\ n^4,\ n^9,\ n^2,\ n^7,\ 1\}$$

仮にaが例1の表のn^3の列にあるとすると

$$\{n^3,\ (n^3)^2,\ (n^3)^3,\ (n^3)^4,\ (n^3)^5,\ (n^3)^6,\ (n^3)^7,\ (n^3)^8,\ (n^3)^9,\ (n^3)^{10},\ (n^3)^{11}\}$$

このとき，$\{1,\ n^3,\ n^6,\ n^9\}$となり，aが原始根であることに反する．

n	n^5	n^7	n^{11}
2	6	11	7
6	2	7	11
7	11	6	2
11	7	2	6

素数13の原始根の個数は，例1の表のn^7，n^{11}の列にある元の個数で，$13-1=12$の既約剰余系の元の個数である．一般に，素数pの原始根の個数は$\varphi(p-1)$に等しい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $w=(1+\sqrt{3}i)z$ より $\quad \dfrac{w}{z}=1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

ゆえに $\quad \arg\dfrac{w}{z}=\dfrac{\pi}{3}$，$\left|\dfrac{w}{z}\right|=2$

A(z)，B(w) とおくと，

$\triangle$OAB は $\angle$AOB $=\dfrac{\pi}{3}$，OB : OA $=2:1$ の直角三角形

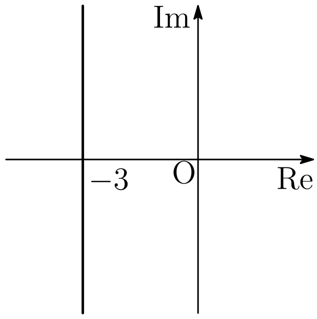
(2) 2 点 $\sqrt{3}i$ と -3 を通る直線上の点 z は，実数 t を用いて

$$z=(1-t)\sqrt{3}i+t(-3)$$

と表されるから

$$\begin{aligned} w&=(1+\sqrt{3}i)z\\ &=(1+\sqrt{3}i)\{(1-t)\sqrt{3}i+t(-3)\}\\ &=-3+(1-4t)\sqrt{3}i \end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{w+\overline{w}=-6}$



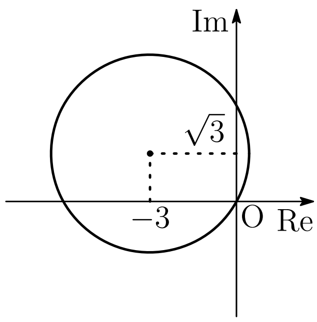
(3) z は $\sqrt{3}\,i$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円周上にあるから

$$|z-\sqrt{3}i|=\sqrt{3}$$

$w=(1+\sqrt{3}i)z$ より

$$\begin{aligned} |1+\sqrt{3}\,i||z-\sqrt{3}i|&=|1+\sqrt{3}\,i|\sqrt{3}\\ |(1+\sqrt{3}\,i)z-(1+\sqrt{3}\,i)\sqrt{3}\,i|&=2\sqrt{3} \end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{|w+3-\sqrt{3}\,i|=2\sqrt{3}}$



3 (1) $y=x^2-2x+1$ より　$y'=2x-2$

曲線上の点 $(t,\ t^2-2t+1)$ における接線の方程式は

$$y-(t^2-2t+1)=(2t-2)(x-t)$$

すなわち　$y=(2t-2)x-t^2+1$　$\cdots$①

これが原点を通るから

$$0=-t^2+1 \quad \text{ゆえに} \quad t=\pm 1$$

これを①に代入すると　$\boldsymbol{y=0,\ y=-4x}$

(2) $\boldsymbol{y'=2x\cos x^2}$

(3) $y=x^{\cos x}$ $(x>0)$ の両辺の対数をとると　$\log y=\cos x\log x$

これを微分すると　$\dfrac{y'}{y}=-\sin x\log x+\dfrac{\cos x}{x}$

よって　$\boldsymbol{y'=x^{\cos x}\left\{\dfrac{\cos x}{x}-(\sin x)\log x\right\}}$

(4)
$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-1}\,dx &= \int (x-1+1)(x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx\\ &= \int\left\{(x-1)^{\frac{3}{2}}+(x-1)^{\frac{1}{2}}\right\}dx\\ &= \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C\\ &= \boldsymbol{\frac{2}{15}(3x+2)(x-1)^{\frac{3}{2}}+C} \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

(5)
$$\begin{aligned}\int_1^e \log x\,dx &= \int_1^e (x)'\log x\,dx\\ &= \Big[\,x\log x\,\Big]_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= e-(e-1)=\boldsymbol{1}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $$f(x)=\int_0^x \frac{1}{(t+a)^2}\,dt=\left[-\frac{1}{t+a}\right]_0^x=\frac{1}{a}-\frac{1}{x+a}$$

よって $$A=\lim_{x\to\infty} f(x)=\boldsymbol{\frac{1}{a}}$$

$a \neq b$ より $$g(x)=\frac{1}{b-a}\int_0^x\left(\frac{1}{t+a}-\frac{1}{t+b}\right)dt$$

$$=\frac{1}{b-a}\Big[\ \log|t+a|-\log|t+b|\ \Big]_0^x$$

$$=\frac{1}{b-a}\left(\log\left|\frac{x+a}{x+b}\right|-\log\frac{a}{b}\right)$$

ゆえに $$B=\lim_{x\to+\infty} g(x)=\frac{1}{b-a}\lim_{x\to+\infty}\left(\log\frac{1+\frac{a}{x}}{1+\frac{b}{x}}+\log\frac{b}{a}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{b-a}\log\frac{b}{a}}$$

(2) (1) の結果から $$\lim_{b\to a} B=\lim_{b\to a}\frac{\log b-\log a}{b-a}$$

ここで，$h(x)=\log x$ とおくと $\lim_{b\to a} B=h'(a)$

$h'(x)=\dfrac{1}{x}$ であるから $\lim_{b\to a} B=\boldsymbol{\dfrac{1}{a}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\theta = 120°$，m は自然数であるから

$$\cos 3m\theta = 1,\ \ \cos(3m-1)\theta = -\frac{1}{2},\ \ \cos(3m-2)\theta = -\frac{1}{2}$$

したがって

$$\begin{aligned} a_{3m} &= 2^{3m-1}\cos 3m\theta = 2^{3m-1}\cdot 1 = \mathbf{2^{3m-1}} \\ a_{3m-1} &= 2^{3m-2}\cos(3m-1)\theta = 2^{3m-2}\left(-\frac{1}{2}\right) = \mathbf{-2^{3m-3}} \\ a_{3m-2} &= 2^{3m-3}\cos(3m-2)\theta = 2^{3m-3}\left(-\frac{1}{2}\right) = \mathbf{-2^{3m-4}} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$a_{3m} + a_{3m-1} + a_{3m-2} = 2^{3m-1} + (-2^{3m-3}) + (-2^{3m-4}) = \frac{5}{2}\cdot 8^{m-1}$$

したがって

$$\begin{aligned} S_{3m} &= \sum_{k=1}^{m}(a_{3k} + a_{3k-1} + a_{3k-2}) = \sum_{k=1}^{m}\frac{5}{2}\cdot 8^{k-1} \\ &= \frac{5}{2}\cdot\frac{8^m - 1}{8-1} = \mathbf{\frac{5}{14}(8^m - 1)} \\ S_{3m-1} &= S_{3m} - a_{3m} = \frac{5}{14}(8^m - 1) - 2^{3m-1} \\ &= \mathbf{-\frac{8^m}{7} - \frac{5}{14}} \\ S_{3m-2} &= S_{3m-1} - a_{3m-1} = -\frac{8^m}{7} - \frac{5}{14} - (-2^{3m-4}) \\ &= \mathbf{-\frac{8^{m-1}}{7} - \frac{5}{14}} \end{aligned}$$

$\boxed{6}$ (1) A(2, 1)，B(1, −1) を $t:1-t$ に内分する点 P の座標は

$$((1-t)\cdot 2+t\cdot 1,\ (1-t)\cdot 1+t\cdot(-1))\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{(2-t,\ 1-2t)}$$

(2) B(1, −1)，C(0, 1) を $t:1-t$ に内分する点 Q の座標は

$$((1-t)\cdot 1+t\cdot 0,\ (1-t)\cdot(-1)+t\cdot 1)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{(1-t,\ -1+2t)}$$

(3) $\mathrm{P}(2-t,\ 1-2t)$，$\mathrm{Q}(1-t, -1+2t)$ を $t:1-t$ に内分する点 $\mathrm{R}(x,\ y)$ は

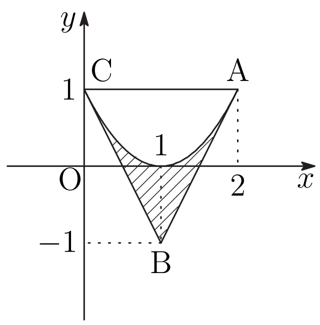
$$x=(1-t)(2-t)+t(1-t)=2(1-t)$$
$$y=(1-t)(1-2t)+t(-1+2t)=(1-2t)^2$$

$0\leqq t\leqq 1$ より，$0\leqq x\leqq 2$．上の 2 式から t を消去すると　$y=(x-1)^2$

よって，R の軌跡の方程式は　$\boldsymbol{y=(x-1)^2\ \ (0\leqq x\leqq 2)}$

(4) 直線 BC の方程式は　$y=-2x+1$

求める面積を S とすると



$$\frac{S}{2}=\int_0^1\{(x-1)^2-(-2x+1)\}\,dx$$
$$=\int_0^1 x^2\,dx=\left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]=\frac{1}{3}$$

よって　$S=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$

$\boxed{7}$ $x_1\leqq y_1$ より，$y_1-x_1=k\geqq 0$ とおくと，$x_1+x_2=y_1+y_2$ より

$$x_2-y_2=y_1-x_1=k\geqq 0$$

したがって　$x_2=y_2+k,\ y_1=x_1+k\quad\cdots(*)$

上の 2 式を $x_1\geqq x_2$，$y_1\geqq y_2$ に代入すると

$$x_1\geqq y_2+k,\quad x_1+k\geqq y_2\quad \text{すなわち}\quad x_1-y_2\geqq k\quad\cdots(**)$$

$(*)$ より　$x_1x_2-y_1y_2=x_1(y_2+k)-(x_1+k)y_2=k(x_1-y_2)$

したがって，上式および $(*)$，$(**)$ から

$k>0$ のとき　$x_1x_2>y_1y_2$

$k=0$，すなわち，$x_1=y_1$，$x_2=y_2$ のとき　$x_1x_2=y_1y_2$

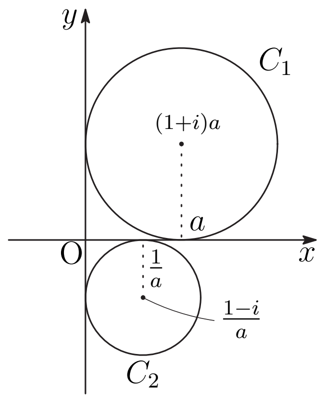
よって　$\boldsymbol{x_1x_2\geqq y_1y_2}$

$\boxed{8}$ $|z-(1+i)a|=a$ より

$$\left|(1+i)a\left(\frac{z}{(1+i)a}-1\right)\right|=a$$

$$\sqrt{2}\left|\frac{(1-i)z}{2a}-1\right|=1$$

$\omega=\dfrac{1}{z}$ より $\quad \sqrt{2}\left|\omega-\dfrac{1-i}{2a}\right|=|\omega|$



両辺を平方すると

$$2\left(\omega-\frac{1-i}{2a}\right)\left(\overline{\omega}-\frac{1+i}{2a}\right)=\omega\overline{\omega}$$

整理すると $\quad \omega\overline{\omega}-\dfrac{1+i}{a}\omega-\dfrac{1-i}{a}\overline{\omega}+\dfrac{1}{a^2}=0 \quad$ すなわち $\quad \left|\omega-\dfrac{1-i}{a}\right|=\dfrac{1}{a}$

したがって，C_1，C_2 の位置関係は，上の図のようになる．

よって $\quad$ **$a=1$ のとき 1 個，$a\neq 1$ のとき 0 個**

$\boxed{9}$ (1) $f(x)=ax(x-n)$ とおくと，C の頂点は第 1 象限にあるから

$$S=\int_0^n ax(x-n)\,dx=-\frac{a}{6}n^3$$

$S=n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ であるから

$$-\frac{a}{6}n^3=n\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{これを解いて} \quad a=-\frac{3}{n^2\cdot 2^{n-1}}$$

したがって $\quad f(x)=-\dfrac{3}{n^2\cdot 2^{n-1}}x(x-n)$

$q=f\left(\dfrac{n}{2}\right)$ であるから

$$q=-\frac{3}{n^2\cdot 2^{n-1}}\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-n\right)=\boldsymbol{\frac{3}{2^{n+1}}}$$

(2) $\dfrac{3}{512}<q<\dfrac{3}{64}$ および (1) の結果から

$$\frac{3}{2^9}<\frac{3}{2^{n+1}}<\frac{3}{2^6} \quad \text{ゆえに} \quad 2^6<2^{n+1}<2^9$$

したがって $\quad 5<n<8 \quad$ これをみたす自然数は $\quad$ **$n=6,\ 7$**

$\boxed{\mathbf{10}}$ $f'(x) = 3x^2 - 6ax + 3(a^2 + a - 3)$

$f'(x) = 0$ の判別式を D とすると

$$D/4 = (-3a)^2 - 3{\cdot}3(a^2 + a - 3) = -9(a - 3)$$

(i) $D \leqq 0$，すなわち，$a \geqq 3$ のとき，$f(x)$ は単調増加
したがって，$a \geqq 3$ は，条件をみたす.

(ii) $a < 3$ のとき，$f'(x) = 3(x - a)^2 + 3(a - 3)$ であるから

$$a < 2 \quad \text{かつ} \quad f'(2) \geqq 0 \quad \cdots (*)$$

$f'(2) = 3(a^2 - 3a + 1)$ であるから，$(*)$ により　　$a \leqq \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$

(i)，(ii) より　　$\boldsymbol{a \leqq \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}}$**，**$\boldsymbol{3 \leqq a}$