平成16年度　佐賀大学２次試験前期日程 (数学問題)
理工・農・文化教育学部　平成16年2月25日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B(120分)
- 農学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{5}$ 〜 $\boxed{7}$ 数I・II・A・B (120分)
- 文化教育学部は，$\boxed{8}$ 〜 $\boxed{11}$ 数I・II・A・B(100分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Oを原点とする座標平面上で，x軸の正の部分OXを始線とする角θの動径上に点Pをとり，頂点がO，A(1, 0)，Pである△OAPを考える．このとき，次の問いに答えよ．ただし，$0° < \theta < 90°$とする．

(1) 点Pのx座標をpとして，△OAPの外接円の面積$S(p)$を求めよ．

(2) 点Pが角θの動径上を動くとき，(1)で求めた$S(p)$の最小値を求めよ．また，$S(p)$が最小となるときの，pの値を，θを用いて表せ．

(3) 角θが$0° < \theta < 90°$の範囲を動くとき，(2)で求めた点Pの軌跡を求め，図示せよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ a，b，cは1でない正の数とし，次の式が成り立つとする．

$$\log_b a + \log_c b + \log_a c = -\frac{11}{3}$$

$\alpha = \log_a b$，$\beta = \log_b c$，$\gamma = \log_c a$とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha\beta\gamma$の値を求めよ．

(2) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$の値を求めよ．

(3) α，β，γが

$$3x^3 - 5x^2 + 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - 3\alpha\beta\gamma = 0$$

の解であるとき，α，β，γの値を求めよ．ただし，$\alpha < \beta < \gamma$とする．

$\boxed{3}$ 複素数平面上の点 z_n $(n=1,2,3,\cdots)$ を以下のように定める．まず，$z_1=1$ とする．次に，1 から 10 までの各数字を 1 つずつ記入した 10 枚のカードが入った箱からカードを 1 枚選び，そのカードが

$$\begin{cases} \text{偶数ならば，} & z_{n+1}=\alpha z_n \\ \text{奇数ならば，} & z_{n+1}=\beta z_n \end{cases}$$

とする．ただし，i は虚数単位で，$\alpha=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$，$\beta=\sqrt{2}(1+i)$ である．また，一度取り出したカードはもとに戻さないものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) α および β の絶対値と偏角 θ $(0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$ を求めよ．

(2) $|z_5|=4$ となる確率を求めよ．

(3) z_5 の偏角が 135° になる確率を求めよ．

(4) $|z_5|$ の値の期待値を求めよ．

$\boxed{4}$ 2 つの関数 $f(x)=\sqrt{\sin x}\,e^{-\frac{x}{2}}$，$g(x)=\sqrt{x}\,e^{-\frac{x}{2}}$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $x>\sin x$ $(0<x<\pi)$ を示せ．

(2) $0<x<\pi$ のとき，$f(x)$ の増減を調べ，極値 $f(a)$ を求めよ．

(3) 2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と直線 $x=a$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．ただし，a は (2) で求めた値とする．

$\boxed{5}$ 放物線 $y=-x^2+ax+b$ を C_1 とする．C_2 は直線 $y=1$ に関して C_1 と対称な曲線である．また，C_2 は x 軸と点 $(\sin\theta,\ 0)$ および点 $(\cos\theta,\ 0)$ で交わるものとする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，a，b は定数，$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ とする．

(1) a，b を，θ を用いて表せ．

(2) C_1 の頂点の座標を $(X,\ Y)$ とするとき，X および Y を，θ を用いて表せ．

(3) (2) で得られた X と Y について，θ を消去し，Y を，X を用いて表せ．

(4) θ が $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ の範囲を動くとき，C_1 の頂点 $(X,\ Y)$ の軌跡を求め，図示せよ．

(5) (4) において，Y の値が最大となるとき，C_1 と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ．

6 次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$(ただし，$a_n > 0$) について，以下の問いに答えよ．

$$\begin{cases} \log_{10} a_1 = 1 - \log_{10} 5 \\ \log_{10} a_2 = \dfrac{1}{1+\log_5 2} \\ \log_{10} a_n = \log_{10}\left(\dfrac{{a_{n-1}}^3}{{a_{n-2}}^2}\right), \ (n = 3, 4, 5, \cdots) \end{cases}$$

(1) a_1，a_2 は自然数である．a_1，a_2 を求めよ．

(2) $b_n = \log_{10} a_n - \log_{10} a_{n-1}$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ が等比数列になることを示し，一般項 b_n を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

7 果物が 30 個入った箱があり，その中の 3 個は不良品である．この箱から 5 個の果物を取り出すとき，次の問いに答えよ．ただし，答えは小数第 3 位を四捨五入して，小数第 2 位まで求めよ．

(1) 不良品が一つもない確率を求めよ．

(2) 不良品が一つもないか，または 1 個だけある確率を求めよ．

8 次のゲームを行う．最初に 2 個のさいころを投げて出た目の和を S とおく．S を 4 で割ったとき，余りが 0 なら当たり，2 または 3 ならはずれとする．S を 4 で割って余りが 1 のときは，再び 2 個のさいころを投げて出た目の和を T とおく．$S+T$ を 4 で割った余りが 0 なら当たり，それ以外ならはずれとする．1 回だけ投げた人は当たれば 500 円もらえ，はずれればもらえない．2 回投げた人は当たれば 400 円もらえ，はずれればもらえない．もらえる金額の期待値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 角 θ は $0^\circ < \theta < 90^\circ$ を満たしているとする．対数 $\log_{\sin\theta}\cos\theta$ の値が 2 以下の整数であるとき，$\sin\theta$ のとりうる値をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{10}}$ 初項 2，公差 4 の等差数列を $\{a_n\}$ $(n \geqq 1)$ とし，初項 2，公差 10 の等差数列を $\{b_n\}$ $(n \geqq 1)$ とする．また，座標空間に次の 4 点

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}(a_{101},\ b_{101},\ 14)\\&\mathrm{B}(a_{102},\ b_{102},\ 0)\\&\mathrm{C}(a_{104},\ b_{104}, -28)\\&\mathrm{D}(a_{103},\ b_{105}, -34)\end{aligned}$$

がある．次の問いに答えよ．

(1) $a_{n+1} - a_n$，$b_{n+2} - b_n$ の値を求めよ．

(2) 3 点 A，B，C は同じ直線上にあることを示せ．

(3) 3 点 A，B，D は同じ直線にあるかないかを調べよ．

$\boxed{\mathbf{11}}$ k を正の数とし，放物線 $y = x(x-1)$ と直線 $y = kx$ と原点 O 以外の交点を A とする．x 軸上の点 B を，直線 AB が y 軸と平行になるようにとる．放物線と線分 OA とで囲まれた部分の面積を S_1，放物線と線分 AB および x 軸とで囲まれた部分の面積を S_2 とおく．このとき面積の差 $S_1 - S_2$ を最大とする k の値を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) △OAP の外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$2R = \frac{\mathrm{AP}}{\sin\theta}$$

$\mathrm{P}(p,\ p\tan\theta)$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2 &= (1-p)^2 + (p\tan\theta)^2 \\ &= 1-2p+p^2(1+\tan^2\theta) = 1-2p+\frac{p^2}{\cos^2\theta}\end{aligned}$$

よって　$$\begin{aligned}S(p) &= \pi R^2 = \pi\left(\frac{\mathrm{AP}}{2\sin\theta}\right)^2 = \frac{\pi\cdot\mathrm{AP}^2}{4\sin^2\theta} \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{4\sin^2\theta}\left(1-2p+\frac{p^2}{\cos^2\theta}\right)}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}S(p) &= \frac{\pi}{4\sin^2\theta\cos^2\theta}(p^2-2p\cos^2\theta+\cos^2\theta) \\ &= \frac{\pi}{4\sin^2\theta\cos^2\theta}\{(p-\cos^2\theta)^2+\sin^2\theta\cos^2\theta\} \\ &= \frac{\pi}{\sin^2 2\theta}(p-\cos^2\theta)^2+\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{p=\cos^2\theta}$ のとき $S(p)$ の最小値 $\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

(3) $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと

$$\begin{aligned}x &= p = \cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \\ y &= p\tan\theta = \cos^2\theta\tan\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta\end{aligned}$$

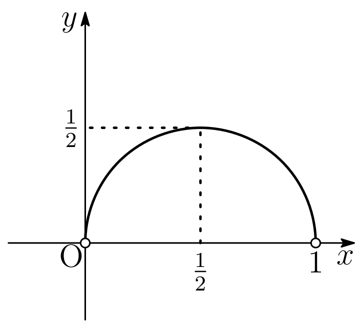
上の 2 式から θ を消去すると　$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より　$0 < x < 1$,　$0 < y \leqq \frac{1}{2}$

よって，求める軌跡の方程式は

$$\boldsymbol{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}\quad (y>0)}$$

また，軌跡の表す図形は，右の図のようになる．



$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\alpha\beta\gamma = \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = \log_a b \times \dfrac{\log_a c}{\log_a b} \times \dfrac{1}{\log_a c} = \mathbf{1}$

(2) $\log_b a + \log_c b + \log_a c = -\dfrac{11}{3}$ より

$$\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_b c} + \frac{1}{\log_c a} = -\frac{11}{3} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -\frac{11}{3}$$

(1) の結果から

$$\alpha\beta\gamma\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) = -\frac{11}{3} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -\frac{11}{3}}$$

(3)
$$3x^3 - 5x^2 + 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - 3\alpha\beta\gamma = 0$$

上式に (1)，(2) の結果を代入すると

$$3x^3 - 5x^2 - 11x - 3 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (x+1)(3x+1)(x-3) = 0$$

この方程式の解が $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ であるから $(\alpha < \beta < \gamma)$

$$\boldsymbol{\alpha = -1,\ \beta = -\frac{1}{3},\ \gamma = 3}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\alpha=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+i)=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ$，$\beta=\sqrt{2}(1+i)=2(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$

よって　　$\boldsymbol{|\,\alpha\,|=1}$，$\boldsymbol{\arg\alpha=30^\circ}$，$\boldsymbol{|\,\beta\,|=2}$，$\boldsymbol{\arg\beta=45^\circ}$

(2) 偶数，奇数のカードをともに2回取り出す確率であるから

$$ {}_4\mathrm{C}_2\times\frac{5{\cdot}4\times5{\cdot}4}{10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7}=\boldsymbol{\frac{10}{21}} $$

(3) 偶数，奇数のカードをそれぞれ3回，1回取り出す確率であるから

$$ {}_4\mathrm{C}_3\times\frac{5{\cdot}4{\cdot}3\times5}{10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7}=\boldsymbol{\frac{5}{21}} $$

(4) $|z_5|=1$，すなわち4回とも偶数である確率は

$$ \frac{5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2}{10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7}=\frac{1}{42} $$

$|z_5|=2$，すなわち偶数，奇数のカードをそれぞれ3回，1回取り出す確率であるから，(3) の結果から　$\dfrac{5}{21}$

$|z_5|=8$，すなわち偶数，奇数のカードをそれぞれ1回，3回取り出す確率は，$|z_5|=2$ のとなる確率と等しく，$\dfrac{5}{21}$

$|z_5|=16$，すなわち4回とも奇数である確率は，$z_5=1$ と等しく，$\dfrac{1}{42}$

(2) の結果および上の結果により，$X=|z_5|$ とすると，次の表ができる．

X	1	2	4	8	16	計
$P(X)$	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$	1

よって，求める期待値は

$$ \frac{1}{42}\times1+\frac{5}{21}\times2+\frac{10}{21}\times4+\frac{5}{21}\times8+\frac{1}{42}\times16=\boldsymbol{\frac{197}{42}} $$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $0 < x < \pi$ のとき $\displaystyle\int_0^x (1-\cos t)\,dt > 0$ ゆえに $x - \sin x > 0$

よって $x > \sin x \quad (0 < x < \pi)$

(2) $f(x) = \sqrt{\sin x}\,e^{-\frac{x}{2}}$ を微分すると

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}e^{-\frac{x}{2}} + \sqrt{\sin x}\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)$$
$$= \frac{\cos x - \sin x}{2\sqrt{\sin x}}e^{-\frac{x}{2}} = \frac{e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2\sin x}}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって 極大値 $\boldsymbol{f(a) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}e^{-\frac{\pi}{8}}} \quad \boldsymbol{\left(a = \dfrac{\pi}{4}\right)}$

(3) (1) の結果から，$0 < x < \pi$ で，$0 < g(x) < f(x)$ であるから，求める立体の体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\{g(x)\}^2\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\{f(x)\}^2\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} xe^{-x}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin x\,dx$$
$$= \Big[-(x+1)e^{-x}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} + \Big[\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} - 1\right)e^{-\frac{\pi}{4}}$$

よって $\boldsymbol{V = \pi\left\{\dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{\pi}{4} - 1\right)e^{-\frac{\pi}{4}}\right\}}$

補足 $\displaystyle\int e^{-x}h(x)\,dx = -e^{-x}\{h(x) + h'(x) + h''(x) + \cdots\} + C$

また $(e^{-x}\sin x)' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$
$(e^{-x}\cos x)' = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x$

辺々を加えると $\{e^{-x}(\sin x + \cos x)\}' = -2e^{-x}\sin x$

よって $\displaystyle\int e^{-x}\sin x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) C_2 は，直線 $y=1$ に関して $C_1: y=-x^2+ax+b$ と対称であるから

$$2-y=-x^2+ax+b \quad \text{すなわち} \quad y=x^2-ax-b+2$$

2 次方程式 $x^2-ax-b+2=0$ の解が $\sin\theta$，$\cos\theta$ であるから，解と係数の関係により

$$\sin\theta+\cos\theta=a, \quad \sin\theta\cos\theta=-b+2$$

よって　　$\boldsymbol{a=\sin\theta+\cos\theta,\ b=2-\sin\theta\cos\theta}$

(2) C_1 は　$y=-\left(x-\dfrac{a}{2}\right)+\dfrac{a^2}{4}+b$　ゆえに　$X=\dfrac{a}{2},\ Y=\dfrac{a^2}{4}+b \quad \cdots(*)$

(1) の結果をこれに代入すると

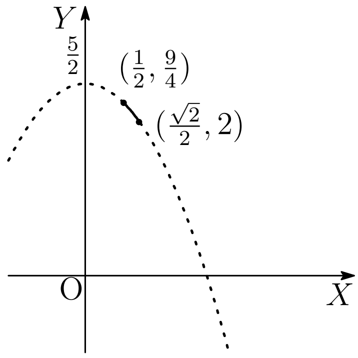
$$X=\boldsymbol{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}}$$
$$Y=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{4}+(2-\sin\theta+\cos\theta)=\boldsymbol{\frac{9}{4}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{2}}$$

(3) (2) の結果から　　$X^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$

したがって　　$Y=-X^2+\dfrac{5}{2}$

$X=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta+45^\circ)\ (0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$ より

$$\frac{1}{2} \leqq X \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$$



よって　$\boldsymbol{Y=-X^2+\dfrac{5}{2}\ \left(\dfrac{1}{2} \leqq X \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

軌跡は，右の図の実線部分.

(4) (3) の結果から，Y の値が最大となるとき　$X=\dfrac{1}{2},\ Y=\dfrac{9}{4}$

これらを $(*)$ に代入すると

$$\frac{1}{2}=\frac{a}{2}, \quad \frac{9}{4}=\frac{a^2}{4}+b \quad \text{ゆえに} \quad a=1,\ b=2$$

したがって，C_1 は　$y=-x^2+x+2=-(x+1)(x-2)$

よって，求める面積は　$-\displaystyle\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)=\frac{1}{6}(2+1)^3=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\log_{10} a_1 = 1 - \log_{10} 5 = \log_{10} 10 - \log_{10} 5 = \log_{10} 2$

$$\log_{10} a_2 = \frac{1}{1+\log_5 2} = \frac{1}{\log_5 5 + \log_5 2} = \frac{1}{\log_5 10} = \log_{10} 5$$

よって　　$\boldsymbol{a_1 = 2,\ a_2 = 5}$

(2) $\log_{10} a_n = \log_{10}\left(\dfrac{{a_{n-1}}^3}{{a_{n-2}}^2}\right)$ より　$\log_{10} a_n = 3\log_{10} a_{n-1} - 2\log_{10} a_{n-2}$

ゆえに　　$\log_{10} a_n - \log_{10} a_{n-1} = 2(\log_{10} a_{n-1} - \log_{10} a_{n-2})$

$b_n = \log_{10} a_n - \log_{10} a_{n-1}$ より　　$b_n = 2b_{n-1}$

したがって，$\{b_n\}$ は，**公比 2 の等比数列**である．

また，$b_2 = \log_{10} a_2 - \log_{10} a_1 = \log_{10} \dfrac{5}{2}$ より

$$b_n = b_2 \cdot 2^{n-2} = \boldsymbol{2^{n-2} \log_{10} \frac{5}{2} \quad (n = 2, 3, \cdots)}$$

(3) $b_n = \log_{10} a_n - \log_{10} a_{n-1}$ より，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=2}^{n} b_k = \sum_{k=2}^{n} (\log_{10} a_k - \log_{10} a_{k-1})$$
$$= \log_{10} a_n - \log_{10} 2 = \log_{10} \frac{a_n}{2} \quad \cdots ①$$

(2) の結果から

$$\sum_{k=2}^{n} b_k = \left(\log_{10} \frac{5}{2}\right) \sum_{k=2}^{n} 2^{k-2}$$
$$= \frac{2^{n-1}-1}{2-1} \log_{10} \frac{5}{2} = \log_{10} \left(\frac{5}{2}\right)^{2^{n-1}-1}$$
$$= \log_{10} \frac{2}{5} \left(\frac{5}{2}\right)^{2^{n-1}} \quad \cdots ②$$

①，② より

$$\frac{a_n}{2} = \frac{2}{5}\left(\frac{5}{2}\right)^{2^{n-1}} \quad \text{すなわち} \quad a_n = \frac{4}{5}\left(\frac{5}{2}\right)^{2^{n-1}}$$

上式は，$n = 1$ のときも成り立つので　　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{5}{2}\right)^{2^{n-1}}}$

$\boxed{7}$ (1) 不良品が1つもない確率は

$$\frac{{}_{27}\mathrm{C}_5}{{}_{30}\mathrm{C}_5}=\frac{27\cdot26\cdot25\cdot24\cdot23}{30\cdot29\cdot28\cdot27\cdot26}=\frac{115}{203}=0.566\cdots$$

よって，求める確率は　**0.57**

(2) 不良品が1個だけある確率は

$$\frac{{}_{27}\mathrm{C}_4\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_{30}\mathrm{C}_5}=\frac{27\cdot26\cdot25\cdot24\times3\times5}{30\cdot29\cdot28\cdot27\cdot26}=\frac{75}{203}$$

不良品が1つもないか，または1個だけある確率は

$$\frac{115}{203}+\frac{75}{203}=\frac{190}{203}=0.935\cdots$$

よって，求める確率は　**0.94**

$\boxed{8}$ 2個のサイコロの出た目を a，b とすると，$a+b$ を4で割った余り r は右の表のようになるので，それぞれの確率は

b \ a	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	0	1	2	3
2	3	0	1	2	3	0
3	0	1	2	3	0	1
4	1	2	3	0	1	2
5	2	3	0	1	2	3
6	3	0	1	2	3	0

r	0	1	2	3	計
確率	$\frac{9}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{10}{36}$	1

したがって，1回目で当りになる確率は

$$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

また，2回目で当りになる確率は

$$\frac{8}{36}\times\frac{10}{36}=\frac{5}{81}$$

よって，求める期待値は

$$500\times\frac{1}{4}+400\times\frac{5}{81}=\boldsymbol{\frac{12125}{81}}\ (\text{円})$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ $0^\circ < \theta < 90^\circ$ より，$0 < \sin\theta < 1$，$0 < \cos\theta < 1$ であるから

$$\log_{\sin\theta}\cos\theta > 0$$

条件から　$\log_{\sin\theta}\cos\theta = 1,\ 2$

(i) $\log_{\sin\theta}\cos\theta = 1$ のとき

$$\cos\theta = \sin\theta \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

(ii) $\log_{\sin\theta}\cos\theta = 2$ のとき

$$\cos\theta = \sin^2\theta \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$$

$\cos\theta > 0$ に注意して，これを解くと　$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

よって　$\sin\theta = \sqrt{\cos\theta} = \boldsymbol{\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}}$

$\boxed{\mathbf{10}}$ (1) $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ のそれぞれの公差に注意して

$$a_{n+1} - a_n = \mathbf{4}, \quad b_{n+2} - b_n = 2 \times 10 = \mathbf{20}$$

(2) $\mathrm{A}(a_{101},\ b_{101},\ 14)$，$\mathrm{B}(a_{102},\ b_{102},\ 0)$，$\mathrm{C}(a_{104},\ b_{104}, -28)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (a_{102} - a_{101},\ b_{102} - b_{101}, -14) = (4,\ 10, -14)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (a_{104} - a_{101},\ b_{104} - b_{101}, -42) = (12,\ 30, -42)$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 3\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

よって，3 点 A，B，C は同一直線上にある．

(3) $\mathrm{D}(a_{103},\ b_{105}, -34)$ より，(1) と同様にして

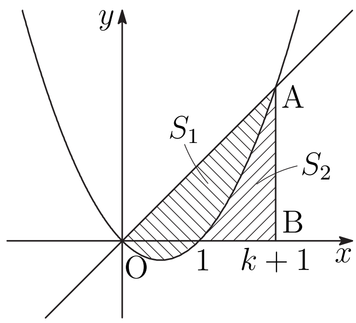
$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (a_{103} - a_{101},\ b_{105} - b_{101}, -48) = (8,\ 40, -48)$$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ をみたす実数 k は存在しない．

よって，3 点 A，B，D は同一直線上にない．

$\boxed{\mathbf{11}}$ $y = x(x-1)$ と $y = kx$ から y を消去すると

$$x(k-1) = kx \quad ゆえに \quad x = 0,\ k+1$$



したがって

$$S_1 = \int_0^{k+1} \{kx - x(x-1)\}\,dx$$

$$= -\int_0^{k+1} x(x-k-1)\,dx = \frac{1}{6}(k+1)^3$$

$$S_2 = \int_1^{k+1} x(x-1)\,dx = \int_1^{k+1} \{(x-1)^2 + (x-1)\}\,dx$$

$$= \left[\ \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{2}(x-1)^2\ \right]_1^{k+1} = \frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{2}k^2$$

ここで，$f(k) = S_1 - S_2$ とおくと

$$f(k) = \frac{1}{6}(k+1)^3 - \left(\frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{2}k^2\right) = -\frac{1}{6}k^3 + \frac{1}{2}k + \frac{1}{6}$$

$$f'(k) = -\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(k+1)(k-1)$$

$k > 0$ における $f(k)$ の増減表は，次のようになる．

k	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(k)$		$+$	0	$-$
$f(k)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって，$S_1 - S_2$ を最大にする k の値は　　$\boldsymbol{k = 1}$