

平成 16 年度 佐賀大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

理工・農・文化教育学部 平成 16 年 2 月 25 日

- 理工学部 ① ② ③ ④ 数 I・II・III・A・B・C (120 分)
- 農学部 ① ⑤ ⑥ ⑦ 数 I・II・A・B (120 分)
- 文化教育学部 ⑧ ⑨ ⑩ ⑪ 数 I・II・A・B (100 分)

① O を原点とする座標平面上で、 x 軸の正の部分 OX を始線とする角 θ の動径上に点 P をとり、頂点が O, A(1, 0), P である $\triangle OAP$ を考える。このとき、次の問いに答えよ。ただし、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする。

- (1) 点 P の x 座標を p として、 $\triangle OAP$ の外接円の面積 $S(p)$ を求めよ。
- (2) 点 P が角 θ の動径上を動くとき、(1) で求めた $S(p)$ の最小値を求めよ。また、 $S(p)$ が最小となるときの、 p の値を、 θ を用いて表せ。
- (3) 角 θ が $0^\circ < \theta < 90^\circ$ の範囲を動くとき、(2) で求めた点 P の軌跡を求め、図示せよ。

② a, b, c は 1 でない正の数とし、次の式が成り立つとする。

$$\log_b a + \log_c b + \log_a c = -\frac{11}{3}$$

$\alpha = \log_a b, \beta = \log_b c, \gamma = \log_c a$ とおくとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\alpha\beta\gamma$ の値を求めよ。
- (2) $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ の値を求めよ。
- (3) α, β, γ が

$$3x^3 - 5x^2 + 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - 3\alpha\beta\gamma = 0$$

の解であるとき、 α, β, γ の値を求めよ。ただし、 $\alpha < \beta < \gamma$ とする。

- 3 複素数平面上の点 z_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を以下のように定める. まず, $z_1 = 1$ とする. 次に, 1 から 10 までの各数字を 1 つずつ記入した 10 枚のカードが入った箱からカードを 1 枚選び, そのカードが

$$\begin{cases} \text{偶数ならば, } z_{n+1} = \alpha z_n \\ \text{奇数ならば, } z_{n+1} = \beta z_n \end{cases}$$

とする. ただし, i は虚数単位で, $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$, $\beta = \sqrt{2}(1 + i)$ である. また, 一度取り出したカードはもとに戻さないものとする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) α および β の絶対値と偏角 θ ($0^\circ \leq \theta < 360^\circ$) を求めよ.
 - (2) $|z_5| = 4$ となる確率を求めよ.
 - (3) z_5 の偏角が 135° になる確率を求めよ.
 - (4) $|z_5|$ の値の期待値を求めよ.
- 4 2つの関数 $f(x) = \sqrt{\sin x} e^{-\frac{x}{2}}$, $g(x) = \sqrt{x} e^{-\frac{x}{2}}$ ($0 \leq x \leq \pi$) について, 次の問いに答えよ.

- (1) $x > \sin x$ ($0 < x < \pi$) を示せ.
 - (2) $0 < x < \pi$ のとき, $f(x)$ の増減を調べ, 極値 $f(a)$ を求めよ.
 - (3) 2つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ と直線 $x = a$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ. ただし, a は (2) で求めた値とする.
- 5 放物線 $y = -x^2 + ax + b$ を C_1 とする. C_2 は直線 $y = 1$ に関して C_1 と対称な曲線である. また, C_2 は x 軸と点 $(\sin \theta, 0)$ および点 $(\cos \theta, 0)$ で交わるものとする. このとき, 次の問いに答えよ. ただし, a, b は定数, $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ とする.

- (1) a, b を, θ を用いて表せ.
- (2) C_1 の頂点の座標を (X, Y) とするとき, X および Y を, θ を用いて表せ.
- (3) (2) で得られた X と Y について, θ を消去し, Y を, X を用いて表せ.
- (4) θ が $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ の範囲を動くとき, C_1 の頂点 (X, Y) の軌跡を求め, 図示せよ.
- (5) (4) において, Y の値が最大となるとき, C_1 と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ.

- 6 次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ (ただし, $a_n > 0$) について, 以下の問いに答えよ.

$$\begin{cases} \log_{10} a_1 = 1 - \log_{10} 5 \\ \log_{10} a_2 = \frac{1}{1 + \log_5 2} \\ \log_{10} a_n = \log_{10} \left(\frac{a_{n-1}^3}{a_{n-2}^2} \right), \quad (n = 3, 4, 5, \dots) \end{cases}$$

- (1) a_1, a_2 は自然数である. a_1, a_2 を求めよ.
- (2) $b_n = \log_{10} a_n - \log_{10} a_{n-1}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) とおくととき, 数列 $\{b_n\}$ が等比数列になることを示し, 一般項 b_n を求めよ.
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ.
- 7 果物が 30 個入った箱があり, その中の 3 個は不良品である. この箱から 5 個の果物を取り出すとき, 次の問いに答えよ. ただし, 答えは小数第 3 位を四捨五入して, 小数第 2 位まで求めよ.

- (1) 不良品が一つもない確率を求めよ.
- (2) 不良品が一つもないか, または 1 個だけある確率を求めよ.

- 8 次のゲームを行う. 最初に 2 個のさいころを投げて出た目の和を S とおく. S を 4 で割ったとき, 余りが 0 なら当たり, 2 または 3 ならはずれとする. S を 4 で割って余りが 1 のときは, 再び 2 個のさいころを投げて出た目の和を T とおく. $S + T$ を 4 で割った余りが 0 なら当たり, それ以外ならはずれとする. 1 回だけ投げた人は当たれば 500 円もらえ, はずれればもらえない. 2 回投げた人は当たれば 400 円もらえ, はずれればもらえない. もらえる金額の期待値を求めよ.

- 9 角 θ は $0^\circ < \theta < 90^\circ$ を満たしているとする. 対数 $\log_{\sin \theta} \cos \theta$ の値が 2 以下の整数であるとき, $\sin \theta$ のとりうる値をすべて求めよ.
- 10 初項 2, 公差 4 の等差数列を $\{a_n\}$ ($n \geq 1$) とし, 初項 2, 公差 10 の等差数列を $\{b_n\}$ ($n \geq 1$) とする. また, 座標空間に次の 4 点

$$A(a_{101}, b_{101}, 14)$$

$$B(a_{102}, b_{102}, 0)$$

$$C(a_{104}, b_{104}, -28)$$

$$D(a_{103}, b_{105}, -34)$$

がある. 次の問いに答えよ.

- (1) $a_{n+1} - a_n$, $b_{n+2} - b_n$ の値を求めよ.
 - (2) 3 点 A, B, C は同じ直線上にあることを示せ.
 - (3) 3 点 A, B, D は同じ直線上にあるかないかを調べよ.
- 11 k を正の数とし, 放物線 $y = x(x - 1)$ と直線 $y = kx$ と原点 O 以外の交点を A とする. x 軸上の点 B を, 直線 AB が y 軸と平行になるようにとる. 放物線と線分 OA とで囲まれた部分の面積を S_1 , 放物線と線分 AB および x 軸とで囲まれた部分の面積を S_2 とおく. このとき面積の差 $S_1 - S_2$ を最大とする k の値を求めよ.

解答例

- 1 (1) $\triangle OAP$ の外接円の半径を R とすると、正弦定理により

$$2R = \frac{AP}{\sin \theta}$$

$P(p, p \tan \theta)$ であるから

$$\begin{aligned} AP^2 &= (1-p)^2 + (p \tan \theta)^2 \\ &= 1 - 2p + p^2(1 + \tan^2 \theta) = 1 - 2p + \frac{p^2}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } S(p) &= \pi R^2 = \pi \left(\frac{AP}{2 \sin \theta} \right)^2 = \frac{\pi \cdot AP^2}{4 \sin^2 \theta} \\ &= \frac{\pi}{4 \sin^2 \theta} \left(1 - 2p + \frac{p^2}{\cos^2 \theta} \right) \end{aligned}$$

- (2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{\pi}{4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} (p^2 - 2p \cos^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &= \frac{\pi}{4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \{ (p - \cos^2 \theta)^2 + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \} \\ &= \frac{\pi}{\sin^2 2\theta} (p - \cos^2 \theta)^2 + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

よって $p = \cos^2 \theta$ のとき $S(p)$ の最小値 $\frac{\pi}{4}$

- (3) $P(x, y)$ とおくと

$$\begin{aligned} x = p = \cos^2 \theta &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \\ y = p \tan \theta = \cos^2 \theta \tan \theta &= \frac{1}{2} \sin 2\theta \end{aligned}$$

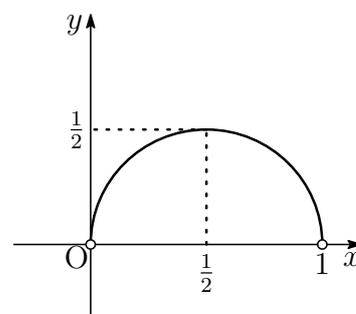
上の2式から θ を消去すると $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より $0 < x < 1$, $0 < y \leq \frac{1}{2}$

よって、求める軌跡の方程式は

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \quad (y > 0)$$

また、軌跡の表す図形は、右の図のようになる。



$$\boxed{2} \quad (1) \quad \alpha\beta\gamma = \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = \log_a b \times \frac{\log_a c}{\log_a b} \times \frac{1}{\log_a c} = 1$$

補足 さらに, $p = \log_a b$ の底 a を c, d に変換すると $p = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log_d b}{\log_d a}$

$$\log_c a \log_d b = \log_d a \log_c b$$

これらの積は底 (真数) について互換性が成立する.

別解 (底の互換性を用いる)

$$\begin{aligned} p &= \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a \\ &= \log_b b \cdot \log_a c \cdot \log_c a \\ &= \log_b b \cdot \log_c c \cdot \log_a a = 1 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \log_b a + \log_c b + \log_a c = -\frac{11}{3} \quad \text{より}$$

$$\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_b c} + \frac{1}{\log_c a} = -\frac{11}{3} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -\frac{11}{3}$$

(1) の結果から

$$\alpha\beta\gamma \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \right) = -\frac{11}{3} \quad \text{よって} \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -\frac{11}{3}$$

$$(3) \quad 3x^3 - 5x^2 + 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - 3\alpha\beta\gamma = 0$$

上式に (1), (2) の結果を代入すると

$$3x^3 - 5x^2 - 11x - 3 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (x+1)(3x+1)(x-3) = 0$$

この方程式の解が α, β, γ であるから ($\alpha < \beta < \gamma$)

$$\alpha = -1, \beta = -\frac{1}{3}, \gamma = 3$$



3 (1) $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i) = \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ$, $\beta = \sqrt{2}(1 + i) = 2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$

よって $|\alpha| = 1$, $\arg \alpha = 30^\circ$, $|\beta| = 2$, $\arg \beta = 45^\circ$

(2) 偶数, 奇数のカードをともに 2 回取り出す確率であるから

$${}_4C_2 \times \frac{5 \cdot 4 \times 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{10}{21}$$

(3) 偶数, 奇数のカードをそれぞれ 3 回, 1 回取り出す確率であるから

$${}_4C_3 \times \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \times 5}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{5}{21}$$

(4) $|z_5| = 1$, すなわち 4 回とも偶数である確率は

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{42}$$

$|z_5| = 2$, すなわち偶数, 奇数のカードをそれぞれ 3 回, 1 回取り出す確率であるから, (3) の結果から $\frac{5}{21}$

$|z_5| = 8$, すなわち偶数, 奇数のカードをそれぞれ 1 回, 3 回取り出す確率は, $|z_5| = 2$ のとなる確率と等しく, $\frac{5}{21}$

$|z_5| = 16$, すなわち 4 回とも奇数である確率は, $|z_5| = 1$ と等しく, $\frac{1}{42}$

(2) の結果および上の結果により, $X = |z_5|$ とすると, 次の表ができる.

X	1	2	4	8	16	計
$P(X)$	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$	1

よって, 求める期待値は

$$\frac{1}{42} \times 1 + \frac{5}{21} \times 2 + \frac{10}{21} \times 4 + \frac{5}{21} \times 8 + \frac{1}{42} \times 16 = \frac{197}{42}$$



4 (1) $0 < x < \pi$ のとき $\int_0^x (1 - \cos t) dt > 0$ ゆえに $x - \sin x > 0$

よって $x > \sin x$ ($0 < x < \pi$)

(2) $f(x) = \sqrt{\sin x} e^{-\frac{x}{2}}$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} e^{-\frac{x}{2}} + \sqrt{\sin x} \left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \right) \\ &= \frac{\cos x - \sin x}{2\sqrt{\sin x}} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2} \sin x} \end{aligned}$$

したがって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{4}$...	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	極大	↘	

よって 極大値 $f(a) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} e^{-\frac{\pi}{8}}$ ($a = \frac{\pi}{4}$)

(3) (1) の結果から、 $0 < x < \pi$ で、 $0 < g(x) < f(x)$ であるから、求める立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{g(x)\}^2 dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{f(x)\}^2 dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x e^{-x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x} \sin x dx \\ &= \left[-(x+1)e^{-x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} - 1 \right) e^{-\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

よって $V = \pi \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} - 1 \right) e^{-\frac{\pi}{4}} \right\}$

補足 $\int e^{-x} h(x) dx = -e^{-x} \{h(x) + h'(x) + h''(x) + \dots\} + C$

また $(e^{-x} \sin x)' = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x$

$(e^{-x} \cos x)' = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x$

辺々を加えると $\{e^{-x}(\sin x + \cos x)\}' = -2e^{-x} \sin x$

よって $\int e^{-x} \sin x dx = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x)$ ■

- 5 (1) C_2 は、直線 $y = 1$ に関して $C_1: y = -x^2 + ax + b$ と対称であるから

$$2 - y = -x^2 + ax + b \quad \text{すなわち} \quad y = x^2 - ax - b + 2$$

2次方程式 $x^2 - ax - b + 2 = 0$ の解が $\sin \theta, \cos \theta$ であるから、解と係数の関係により

$$\sin \theta + \cos \theta = a, \quad \sin \theta \cos \theta = -b + 2$$

よって $a = \sin \theta + \cos \theta, b = 2 - \sin \theta \cos \theta$

- (2) C_1 は $y = -\left(x - \frac{a}{2}\right) + \frac{a^2}{4} + b$ ゆえに $X = \frac{a}{2}, Y = \frac{a^2}{4} + b \dots (*)$

(1)の結果をこれに代入すると

$$X = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{2}$$

$$Y = \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2}{4} + (2 - \sin \theta \cos \theta) = \frac{9}{4} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{2}$$

- (3) (2)の結果から $X^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta$

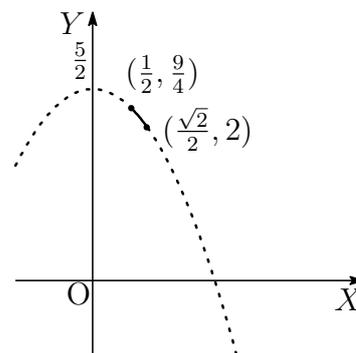
したがって $Y = -X^2 + \frac{5}{2}$

$X = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta + 45^\circ) \quad (0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$ より

$$\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって $Y = -X^2 + \frac{5}{2} \quad \left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

軌跡は、右の図の実線部分.



- (4) (3)の結果から、 Y の値が最大となるとき $X = \frac{1}{2}, Y = \frac{9}{4}$
これらを (*) に代入すると

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{2}, \quad \frac{9}{4} = \frac{a^2}{4} + b \quad \text{ゆえに} \quad a = 1, b = 2$$

したがって、 C_1 は $y = -x^2 + x + 2 = -(x+1)(x-2)$

よって、求める面積は $-\int_{-1}^2 (x+1)(x-2) = \frac{1}{6}(2+1)^3 = \frac{9}{2}$ ■

6 (1) $\log_{10} a_1 = 1 - \log_{10} 5 = \log_{10} 10 - \log_{10} 5 = \log_{10} 2$

$$\log_{10} a_2 = \frac{1}{1 + \log_5 2} = \frac{1}{\log_5 5 + \log_5 2} = \frac{1}{\log_5 10} = \log_{10} 5$$

よって $a_1 = 2, a_2 = 5$

(2) $\log_{10} a_n = \log_{10} \left(\frac{a_{n-1}^3}{a_{n-2}^2} \right)$ より $\log_{10} a_n = 3 \log_{10} a_{n-1} - 2 \log_{10} a_{n-2}$

ゆえに $\log_{10} a_n - \log_{10} a_{n-1} = 2(\log_{10} a_{n-1} - \log_{10} a_{n-2})$

$b_n = \log_{10} a_n - \log_{10} a_{n-1}$ より $b_n = 2b_{n-1}$

したがって, $\{b_n\}$ は, 公比 2 の等比数列である.

また, $b_2 = \log_{10} a_2 - \log_{10} a_1 = \log_{10} \frac{5}{2}$ より

$$b_n = b_2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-2} \log_{10} \frac{5}{2} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

(3) $b_n = \log_{10} a_n - \log_{10} a_{n-1}$ より, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n b_k &= \sum_{k=2}^n (\log_{10} a_k - \log_{10} a_{k-1}) \\ &= \log_{10} a_n - \log_{10} 2 = \log_{10} \frac{a_n}{2} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(2) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n b_k &= \left(\log_{10} \frac{5}{2} \right) \sum_{k=2}^n 2^{k-2} \\ &= \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} \log_{10} \frac{5}{2} = \log_{10} \left(\frac{5}{2} \right)^{2^{n-1} - 1} \\ &= \log_{10} \frac{2}{5} \left(\frac{5}{2} \right)^{2^{n-1}} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ② より

$$\frac{a_n}{2} = \frac{2}{5} \left(\frac{5}{2} \right)^{2^{n-1}} \quad \text{すなわち} \quad a_n = \frac{4}{5} \left(\frac{5}{2} \right)^{2^{n-1}}$$

上式は, $n = 1$ のときも成り立つので $a_n = \frac{4}{5} \left(\frac{5}{2} \right)^{2^{n-1}}$ ■

- 7 (1) 不良品が1つも無い確率は

$$\frac{{}_{27}C_5}{{}_{30}C_5} = \frac{27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26} = \frac{115}{203} = 0.566 \dots$$

よって、求める確率は **0.57**

- (2) 不良品が1個だけある確率は

$$\frac{{}_{27}C_4 \times {}_3C_1}{{}_{30}C_5} = \frac{27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \times 3 \times 5}{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26} = \frac{75}{203}$$

不良品が1つも無い、または1個だけある確率は

$$\frac{115}{203} + \frac{75}{203} = \frac{190}{203} = 0.935 \dots$$

よって、求める確率は **0.94**

- 8 2個のサイコロの出た目を a, b とすると、 $a+b$ を4で割った余り r は右の表のようになるので、それぞれの確率は

r	0	1	2	3	計
確率	$\frac{9}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{10}{36}$	1

$b \backslash a$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	0	1	2	3
2	3	0	1	2	3	0
3	0	1	2	3	0	1
4	1	2	3	0	1	2
5	2	3	0	1	2	3
6	3	0	1	2	3	0

したがって、1回目で当りになる確率は

$$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

また、2回目で当りになる確率は

$$\frac{8}{36} \times \frac{10}{36} = \frac{5}{81}$$

よって、求める期待値は

$$500 \times \frac{1}{4} + 400 \times \frac{5}{81} = \frac{12125}{81} \text{ (円)}$$

9 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ より, $0 < \sin \theta < 1$, $0 < \cos \theta < 1$ であるから

$$\log_{\sin \theta} \cos \theta > 0$$

条件から $\log_{\sin \theta} \cos \theta = 1, 2$

(i) $\log_{\sin \theta} \cos \theta = 1$ のとき

$$\cos \theta = \sin \theta \quad \text{よって} \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(ii) $\log_{\sin \theta} \cos \theta = 2$ のとき

$$\cos \theta = \sin^2 \theta \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0$$

$$\cos \theta > 0 \text{ に注意して, これを解くと } \cos \theta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\text{よって} \quad \sin \theta = \sqrt{\cos \theta} = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$$

10 (1) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ のそれぞれの公差に注意して

$$a_{n+1} - a_n = 4, \quad b_{n+2} - b_n = 2 \times 10 = 20$$

(2) $A(a_{101}, b_{101}, 14)$, $B(a_{102}, b_{102}, 0)$, $C(a_{104}, b_{104}, -28)$ より

$$\overrightarrow{AB} = (a_{102} - a_{101}, b_{102} - b_{101}, -14) = (4, 10, -14)$$

$$\overrightarrow{AC} = (a_{104} - a_{101}, b_{104} - b_{101}, -42) = (12, 30, -42)$$

$$\text{したがって} \quad \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$$

よって, 3点 A, B, C は同一直線上にある.

(3) $D(a_{103}, b_{105}, -34)$ より, (1) と同様にして

$$\overrightarrow{AD} = (a_{103} - a_{101}, b_{105} - b_{101}, -48) = (8, 40, -48)$$

したがって, $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$ をみたす実数 k は存在しない.

よって, 3点 A, B, D は同一直線上にない.

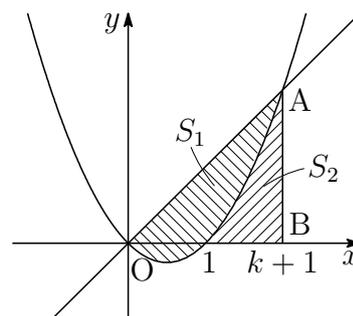
11 $y = x(x-1)$ と $y = kx$ から y を消去すると

$$x(x-1) = kx \quad \text{ゆえに} \quad x = 0, k+1$$

したがって

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{k+1} \{kx - x(x-1)\} dx \\ &= - \int_0^{k+1} x(x-k-1) dx = \frac{1}{6}(k+1)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_1^{k+1} x(x-1) dx = \int_1^{k+1} \{(x-1)^2 + (x-1)\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{2}(x-1)^2 \right]_1^{k+1} = \frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{2}k^2 \end{aligned}$$



ここで、 $f(k) = S_1 - S_2$ とおくと

$$\begin{aligned} f(k) &= \frac{1}{6}(k+1)^3 - \left(\frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{2}k^2 \right) = -\frac{1}{6}k^3 + \frac{1}{2}k + \frac{1}{6} \\ f'(k) &= -\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(k+1)(k-1) \end{aligned}$$

$k > 0$ における $f(k)$ の増減表は、次のようになる。

k	(0)	...	1	...
$f'(k)$		+	0	-
$f(k)$		↗	極大	↘

よって、 $S_1 - S_2$ を最大にする k の値は $k = 1$ ■