

## 平成 15 年度 佐賀大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

理工・農・文化教育学部 平成 15 年 2 月 25 日

- 理工学部 [1] [2] [3] [4] 数 I・II・III・A・B・C (120 分)
- 農学部 [5] [6] [7] [8] 数 I・II・A・B (120 分)
- 文化教育学部 [9] [10] [11] [12] 数 I・II・A・B (100 分)

[1] 次の問いに答えよ.

(1)  $\triangle ABC$  の外接円の半径を  $R$ ,  $\angle BAC$  を  $A$  とするとき,  $\frac{BC}{\sin A} = 2R$  が成立する. このことを

$$(i) A = \frac{\pi}{2} \text{ の場合, } (ii) A < \frac{\pi}{2} \text{ の場合, } (iii) A > \frac{\pi}{2} \text{ の場合}$$

についてそれぞれ証明せよ.

(2)  $AC = b$ ,  $\angle ABC = \theta$ ,  $\angle ACB = 3\theta$  の  $\triangle ABC$  の辺  $BC$  またはその延長上に  $\angle CAP = p\theta$  ( $p > 0$ ) となるように点  $P$  をとる. 線分  $CP$  の長さ  $l$  を  $b$ ,  $p$ ,  $\theta$  を用いて表せ.

(3) (2) で求めた  $l$  の極限值  $\lim_{\theta \rightarrow 0} l$  を求めよ.

[2]  $xy$  平面上に 4 つの点  $E(1, 1)$ ,  $F(4, 1)$ ,  $G(4, 4)$ ,  $H(1, 4)$  をとる. また,  $m > 0$  とし,  $y = m^2x^2$  で定まる放物線を  $C$  とする. 次の問いに答えよ.

(1)  $C$  と四角形  $EFGH$  が交わるときの  $m$  の範囲を求めよ.

(2)  $C$  が四角形  $EFGH$  を 2 つに分割するとき,  $C$  よりも右側にある部分の面積を  $S$  とする.  $S$  を  $m$  の関数として表せ.

(3)  $C$  が四角形  $EFGH$  の面積を 2 等分するときの  $m$  の値を求めよ.

[3]  $0 \leq \alpha$ ,  $\beta \leq \frac{\pi}{2}$  である実数  $\alpha$ ,  $\beta$  に対し, 複素数  $z_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を

$$z_n = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n + (\cos \beta + i \sin \beta)^n$$

で定める. 次の問いに答えよ.

(1)  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{4}$  のとき,  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$ ,  $z_4$  を複素数平面上に図示せよ.

(2)  $z_6 = -2$  となる  $\alpha$ ,  $\beta$  の組をすべて求めよ.

(3)  $\alpha = 2\beta$  のとき,  $z_6 = 0$  となる  $\alpha$  をすべて求めよ.

4  $xy$  平面において、 $y$  軸上の点  $A(0, a)$  と曲線  $y = \log x$  上の点  $X(x, \log x)$  を考える。ただし、対数は自然対数とする。

- (1) 線分  $AX$  の長さが最短になる点  $B$  はただ 1 つ存在し、線分  $AB$  は点  $B$  における曲線  $y = \log x$  の接線  $l$  と直交することを、以下の手順で証明せよ。
  - (i) 定数  $a$  に対して、 $x^2 + \log x - a = 0$  を満たす  $x$  はただ 1 つ存在することを示せ。
  - (ii)  $b$  を、 $b^2 + \log b - a = 0$  を満たす実数とする。線分  $AX$  の長さが最短となる点は、 $B(b, \log b)$  のみであることを示せ。
  - (iii) 線分  $AB$  は、 $B(b, \log b)$  における曲線  $y = \log x$  の接線  $l$  と直交することを示せ。
- (2)  $B(b, \log b)$  を、(1) で導いた点とする。線分  $AB$  の長さが、 $AB = \sqrt{6}$  となるときの  $a$  の値を求めよ。

5  $\triangle ABC$  の重心を  $G$  とし、ベクトル  $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ 、ベクトル  $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$  とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル  $\overrightarrow{BG}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{c}$  を用いて表せ。
- (2)  $BP : PA = 2 : 3$  となる点  $P$  を辺  $AB$  上にとり、直線  $PG$  と直線  $BC$  が交わる点を  $Q$  とする。ベクトル  $\overrightarrow{BQ}$  を  $\vec{c}$  を用いて表せ。

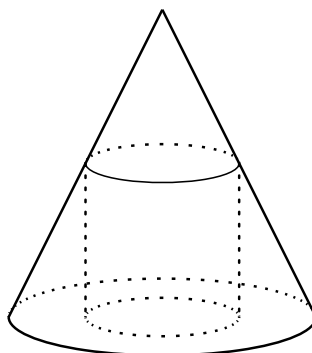
6 次の数列  $\{a_n\}$  の一般項を以下の手順で求めよ。

$$1, 2, 4, 10, 23, 46, 82, 134, \dots$$

- (1) 数列  $\{a_n\}$  の階差数列を  $\{b_n\}$  とする。  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  を求めよ。
- (2) 数列  $\{b_n\}$  の階差数列は等差数列である。数列  $\{b_n\}$  の一般項を求めよ。
- (3) (2) の結果を用いて、数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

7 底面の半径  $r$ 、高さ  $h$  の直円錐に図のように内接する円柱について、以下の問いに答えよ。

- (1) 円柱の高さを  $x$  とするとき、円柱の体積  $V$  を  $x$  の式で表せ。
- (2) 円柱の体積の最大値  $M$  を求めよ。
- (3)  $r, h$  が  $r + h = 3$  をみたすとする。このとき、 $M$  の最大値を求めよ。



8  $xy$  平面上の 3 点  $O, A, B$  の座標を、それぞれ  $(0, 0), (3, 0), (0, 4)$  とし、線分  $AB$  を 3 等分する 2 点を  $P, Q$  とする。

- (1) 線分  $OP$  の延長線上に点  $S$  を、線分  $OQ$  の延長線上に点  $R$  をとり、 $OP : OS = OQ : OR = 1 : 3$  とするとき、点  $S, R$  の座標を求めよ。ただし、点  $S, R$  は第一象限にあるものとする。
- (2) 直線  $y = -2x + k$  が四角形  $PQRS$  の面積を 2 等分するときの  $k$  の値を求めよ。

9  $a$  を正の数とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $h$  を正の数とする。  $x$  の値が  $a^2$  から  $(a + h)^2$  まで変化するときの関数  $y = (x + h)^2$  の平均変化率を  $A(h)$  とする。このとき、 $A(h)$  を求めよ。
- (2)  $h$  を実数とする。関数  $y = (x + h)^2$  の  $x = (a + h)^2$  における微分係数を  $B(h)$  とするとき、 $B(h)$  を微分係数の定義に従って求めよ。
- (3)  $h \geq 1$  であるすべての  $h$  について

$$A(h) + 2 < B(h)$$

となる  $a$  の値の範囲を求めよ。

10  $a$  を正の定数とする。等式

$$\int_{-1}^2 (x - a)(2 - x) dx = 3 \int_{-1}^c (x - a) dx$$

が成り立つような  $c$  の値は  $-1 < c < 2$  の範囲にいくつあるか。

**11** 方程式  $z^5 = 1$  の解  $z$  について次の問いに答えよ.

(1)  $z$  を極形式で表せ.

(2)  $z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$  を用いて  $z + \frac{1}{z}$  の値を求めよ.

(3)  $\cos 144^\circ$  の値を求めよ.

**12** 座標平面上の原点を  $O$  とし, 点  $A$  の座標を  $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ , 点  $B$  の座標を  $\left(0, \frac{2}{3}\right)$  とする. 負でない実数  $s, t$  は  $s + 2t = 3$  を満たしながら動くものとする. このとき, 座標平面上の点  $P$  を

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

により定める. 次の問いに答えよ.

(1) 点  $P$  の存在範囲を図示せよ.

(2) 内積  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP}$  の最小値を求めよ.

## 解答例

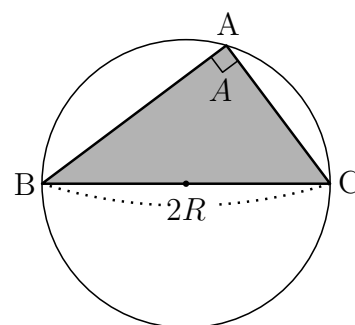
1 (1) (i)  $A = \frac{\pi}{2}$  の場合

BCは $\triangle ABC$ の直径になる。  
外接円の半径は $R$ であるから

$$BC = 2R$$

一方、 $\sin A = \sin \frac{\pi}{2} = 1$  であるから

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R$$



(ii)  $A < \frac{\pi}{2}$  の場合

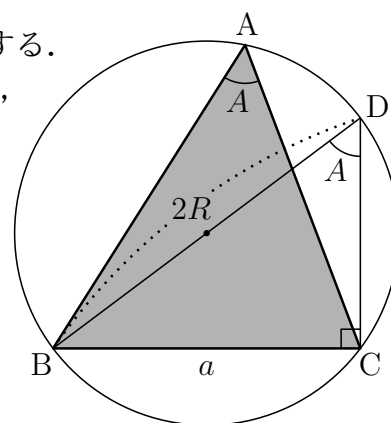
右の図で、線分BDは $\triangle ABC$ の直径とする。  
このとき、円周角と中心角の性質により、

$$\angle BDC = \angle BAC = A$$

$$\angle BCD = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ。また、 $BD = 2R$  である。  
よって、 $\triangle BCD$ において

$$BC = 2R \sin A \quad \text{ゆえに} \quad \frac{BC}{\sin A} = 2R$$



(iii)  $A > \frac{\pi}{2}$  の場合

$\triangle ABC$ の外接円の周上に、辺BCに関して点Aとは反対側の点Dをとる。  
 $\angle BDC = D$  とすると、円周角と中心角の性質により

$$2A + 2D = 2\pi \quad \text{すなわち} \quad A + D = \pi$$

が成り立つから

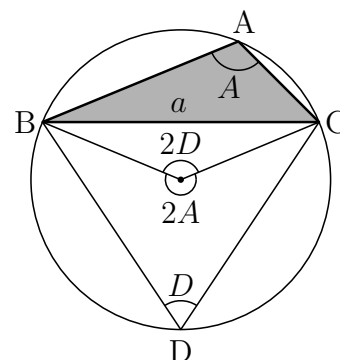
$$\sin D = \sin(\pi - A) = \sin A \quad \dots \textcircled{1}$$

$0 < D < \frac{\pi}{2}$  であるから、(i)より $\triangle BCD$ において、

$$BC = 2R \sin D$$

が成り立つ。したがって、 $\textcircled{1}$ により、

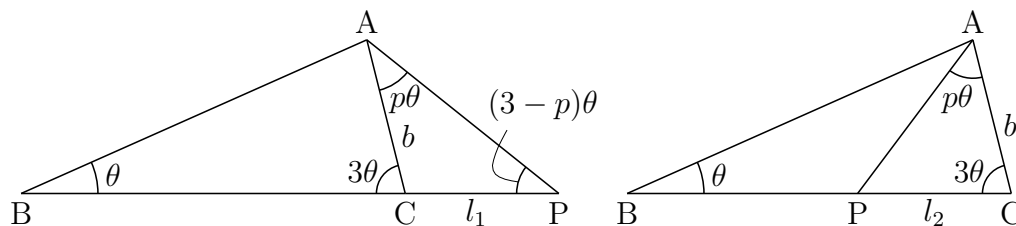
$$BC = 2R \sin A \quad \text{ゆえに} \quad \frac{BC}{\sin A} = 2R$$



- (2) 点Pが辺ACに関して点Bと反対側にあるとき  $CP = l_1$ , 同じ側にあるとき  $CP = l_2$  とする.  $\triangle ACP$  に正弦定理を適用すると

$$\frac{l_1}{\sin p\theta} = \frac{b}{\sin(3-p)\theta} \quad \text{ゆえに} \quad l_1 = \frac{b \sin p\theta}{\sin(3-p)\theta}$$

$$\frac{l_2}{\sin p\theta} = \frac{b}{\sin \angle APC} \quad \text{ゆえに} \quad l_2 = \frac{b \sin p\theta}{\sin(3+p)\theta}$$



- (3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} l_1 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{b \sin p\theta}{\sin(3-p)\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin p\theta}{p\theta} \cdot \frac{(3-p)\theta}{\sin(3-p)\theta} \cdot \frac{bp}{3-p} = \frac{bp}{3-p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} l_2 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{b \sin p\theta}{\sin(3+p)\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin p\theta}{p\theta} \cdot \frac{(3+p)\theta}{\sin(3+p)\theta} \cdot \frac{bp}{3+p} = \frac{bp}{3+p} \end{aligned}$$



2 (1) HはCの上側, FはCの下側にあるから

$$4 \geq m^2 \quad \text{かつ} \quad 1 \leq 16m^2 \quad m > 0 \quad \text{に注意して} \quad \frac{1}{4} \leq m \leq 2$$

(2) 下の図により, 次の(i)~(iii)の場合に分けて求める.

(i)  $\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{1}{2}$  のとき

$$S = \int_{\frac{1}{m}}^4 (m^2 x^2 - 1) dx = \left[ \frac{m^2 x^3}{3} - x \right]_{\frac{1}{m}}^4 = \frac{64}{3} m^2 + \frac{2}{3m} - 4$$

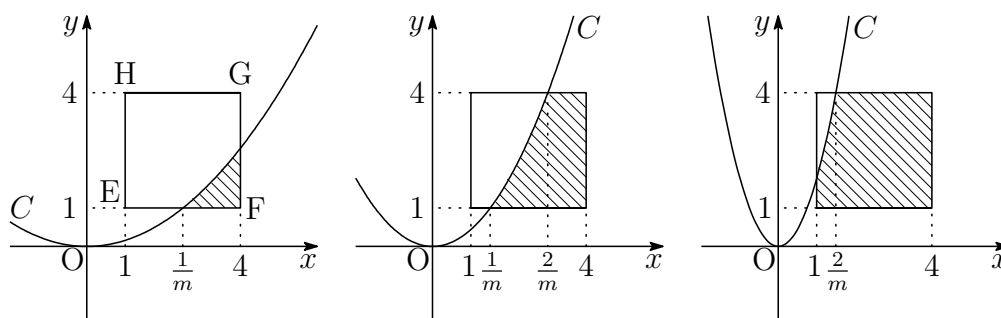
(ii)  $\frac{1}{2} \leq m \leq 1$  のとき

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{2}{m}} (m^2 x^2 - 1) dx + 3 \left( 4 - \frac{2}{m} \right) \\ &= \left[ \frac{m^2 x^3}{3} - x \right]_{\frac{1}{m}}^{\frac{2}{m}} + 3 \left( 4 - \frac{2}{m} \right) = -\frac{14}{3m} + 12 \end{aligned}$$

(iii)  $1 \leq m \leq 2$  のとき

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{\frac{2}{m}} (m^2 x^2 - 1) dx + 3 \left( 4 - \frac{2}{m} \right) \\ &= \left[ \frac{m^2 x^3}{3} - x \right]_1^{\frac{2}{m}} + 3 \left( 4 - \frac{2}{m} \right) = -\frac{m^2}{3} - \frac{16}{3m} + 13 \end{aligned}$$

(i)  $\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{1}{2}$  のとき      (ii)  $\frac{1}{2} \leq m \leq 1$  のとき      (iii)  $1 \leq m \leq 2$  のとき



(3) Cが四角形EFGHの面積を2等分するのは, (2)-(ii)のときであるから

$$-\frac{14}{3m} + 12 = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \quad \text{このとき} \quad \frac{1}{2} \leq m \leq 1 \quad \text{に注意して} \quad m = \frac{28}{45}$$

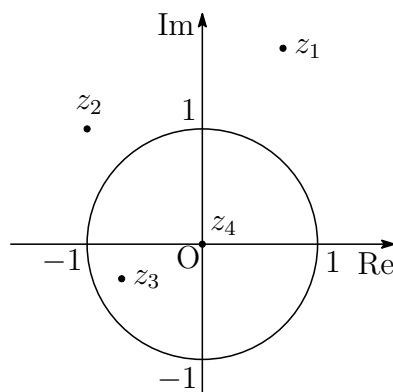
■

**3** (1)  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{4}$  のとき

$$\begin{aligned} z_n &= \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)^n + \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^n \\ &= \cos \frac{n}{2}\pi + i \sin \frac{n}{2}\pi + \cos \frac{n}{4}\pi + i \sin \frac{n}{4}\pi \\ &= \left( \cos \frac{n}{2}\pi + \cos \frac{n}{4}\pi \right) + i \left( \sin \frac{n}{2}\pi + \sin \frac{n}{4}\pi \right) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) i, & z_2 &= -1 + i, \\ z_3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \left( -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) i, & z_4 &= 0 \end{aligned}$$



(2) 
$$\begin{aligned} z_6 &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)^6 + (\cos \beta + i \sin \beta)^6 \\ &= (\cos 6\alpha + \cos 6\beta) + i(\sin 6\alpha + \sin 6\beta) \end{aligned}$$

$0 \leq \alpha, \beta \leq \frac{\pi}{2}$  および  $z_6 = -2$  から

$$\cos 6\alpha = -1, \quad \cos 6\beta = -1$$

したがって

$$(\alpha, \beta) = \left( \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right), \left( \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right), \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6} \right), \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

(3)  $\alpha = 2\beta$  であるから

$$\begin{aligned}z_6 &= (\cos 6\alpha + \cos 6\beta) + i(\sin 6\alpha + \sin 6\beta) \\ &= (\cos 6\alpha + \cos 3\alpha) + i(\sin 6\alpha + \sin 3\alpha) \\ &= (\cos 3\alpha + 1)(2 \cos 3\alpha - 1) + i \sin 3\alpha(2 \cos 3\alpha + 1)\end{aligned}$$

$z_6 = 0$ ,  $0 \leq 3\alpha \leq \frac{3}{2}\pi$  であるから

$z_6$  の実部から  $3\alpha = \frac{\pi}{3}, \pi$

$z_6$  の虚部から  $3\alpha = 0, \frac{2}{3}\pi, \pi$

ゆえに  $3\alpha = \pi$  よって  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  ■

- 4 (1) (i)  $f(x) = x^2 + \log x - a$  ( $x > 0$ ) とおくと  $f'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$   
ゆえに、 $f(x)$  は単調増加.

$$\text{また } \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

よって、 $f(x) = 0$  を満たす  $x$  がただ 1 つ存在する.

- (ii) (i) の結果から、 $f(x) = 0$  を満たすただ 1 つの  $x$  を  $b$  とすると

$$f(b) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$g(x) = \log x, \quad d(x) = AX^2 = x^2 + \{g(x) - a\}^2 \text{ とおくと}$$

$$\frac{1}{2}d'(x) = x + \{g(x) - a\}g'(x) \quad \dots \textcircled{2}$$

$$= x + (\log x - a)\frac{1}{x} = \frac{f(x)}{x}$$

AX の長さが最短になる点で  $d(x)$  は極小となるから、このとき

$$d'(x) = 0 \quad \text{すなわち} \quad f(x) = 0$$

よって、上式を満たす点は  $B(b, \log b)$  のみである.

- (iii) (ii) の結果から、 $d'(b) = 0$  であるから、 $\textcircled{2}$  より

$$b + \{g(b) - a\}g'(b) = 0$$

$y = g(x)$  の B における接ベクトルを  $\vec{v} = (1, g'(b))$  とおくと

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = b + \{g(b) - a\}g'(b)$$

したがって  $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = 0$  すなわち  $\overrightarrow{AB} \perp \vec{v}$

よって、線分 AB は、B における曲線の接線  $l$  と直交する.

- (2)  $\textcircled{1}$  から  $b^2 + \log b - a = 0 \quad \dots \textcircled{3}$

$$AB^2 = 6 \text{ であるから } b^2 + (\log b - a)^2 = 6 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ から } b^2 + b^4 = 6 \text{ ゆえに } (b^2 + 3)(b^2 - 2) = 0$$

$$\text{すなわち } b = \sqrt{2} \text{ これを } \textcircled{3} \text{ に代入して } a = 2 + \frac{1}{2} \log 2 \quad \blacksquare$$

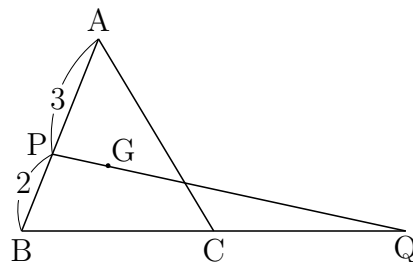
5 (1) AC の中点を M とすると  $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$

G は BM を 2:1 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{c})$$

(2) Q は直線 PG 上にあるから ( $t$  は実数)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BQ} &= (1-t)\overrightarrow{BP} + t\overrightarrow{BG} \\ &= \frac{2}{5}(1-t)\vec{a} + \frac{1}{3}t(\vec{a} + \vec{c}) \\ &= \left(\frac{2}{5} - \frac{t}{15}\right)\vec{a} + \frac{t}{3}\vec{c}\end{aligned}$$



また, Q は直線 BC 上にあるから

$$\frac{2}{5} - \frac{t}{15} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = 6 \quad \text{よって} \quad \overrightarrow{BQ} = 2\vec{c}$$

6 (1)  $b_1 = 2 - 1 = \mathbf{1}$ ,  $b_2 = 4 - 2 = \mathbf{2}$ ,  $b_3 = 10 - 4 = \mathbf{6}$ ,  
 $b_4 = 23 - 10 = \mathbf{13}$ ,  $b_5 = 45 - 23 = \mathbf{23}$

(2) (1) の結果から

$$b_2 - b_1 = 1, \quad b_3 - b_2 = 4, \quad b_4 - b_3 = 7, \quad b_5 - b_4 = 10$$

$\{b_n\}$  の階差数列は, 初項が 1, 公差が 3 の等差数列であるから

$$b_{n+1} - b_n = 1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2$$

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = \sum_{k=1}^{n-1} (3k - 2)$$

$$b_n - b_1 = 3 \cdot \frac{1}{2}n(n-1) - 2(n-1)$$

$$b_n = \frac{1}{2}(3n^2 - 7n + 6)$$

$$n = 1 \text{ のときも, 上式は成り立つから} \quad b_n = \frac{1}{2}(3n^2 - 7n + 6)$$

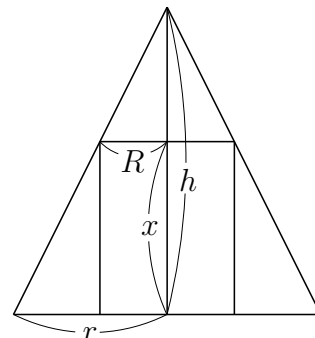
$$\begin{aligned}(3) \quad n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}(3k^2 - 7k + 6) \\ &= \frac{1}{2}(n^3 - 5n^2 + 10n - 4)\end{aligned}$$

$$\text{上式は, } n = 1 \text{ のときも成り立つから} \quad a_n = \frac{1}{2}(n^3 - 5n^2 + 10n - 4)$$

7 (1) 円柱の半径を  $r$  とすると

$$\frac{h}{r} = \frac{h-x}{R} \quad \text{ゆえに} \quad R = r \left(1 - \frac{x}{h}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad V &= \pi R^2 x = \pi r^2 \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 x \\ &= \pi r^2 \left(\frac{x^3}{h^2} - \frac{2x^2}{h} + x\right) \end{aligned}$$



(2) (1) の結果から ( $0 < x < h$ )

$$\frac{dV}{dx} = \pi r^2 \left(\frac{3x^2}{h^2} - \frac{4x}{h} + 1\right) = \pi r^2 \left(\frac{3x}{h} - 1\right) \left(\frac{x}{h} - 1\right)$$

$V$  の増減表は、次のようになる。

$x$	(0)	...	$\frac{h}{3}$	...	( $h$ )
$V'$		+	0	-	
$V$		↗	$\frac{4}{27}\pi r^2 h$	↘	

よって、 $V$  は  $x = \frac{h}{3}$  のとき、最大値  $M = \frac{4}{27}\pi r^2 h$  をとる。

(3)  $r + h = 3$  のとき  $h = 3 - r$  これを (2) の結果に代入すると

$$\begin{aligned} M &= \frac{4}{27}\pi r^2(3-r) = \frac{4}{27}\pi(3r^2 - r^3) \\ \frac{dM}{dr} &= \frac{4}{27}\pi(6r - 3r^2) = \frac{4}{9}\pi r(2-r) \end{aligned}$$

$r > 0$ ,  $h = 3 - r > 0$  であるから  $0 < r < 3$

このとき、 $M$  の増減表は、次のようになる。

$r$	(0)	...	2	...	(3)
$M'$		+	0	-	
$M$		↗	$\frac{16}{27}\pi$	↘	

よって、 $M$  は、 $r = 2$  のとき、最大値  $\frac{16\pi}{27}$  をとる。 ■

8 (1) PはABを1:2に内分する点であるから

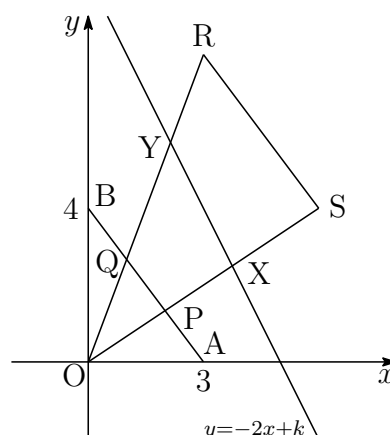
$$\left(\frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 0}{1 + 2}, \frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot 4}{1 + 2}\right) \text{ より } P\left(2, \frac{4}{3}\right)$$

QはABを2:1に内分する点であるから

$$\left(\frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 0}{2 + 1}, \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 4}{2 + 1}\right) \text{ より } Q\left(1, \frac{8}{3}\right)$$

$\vec{OS} = 3\vec{OP}$ ,  $\vec{OR} = 3\vec{OQ}$  であるから

$$S(6, 4), R(3, 8)$$



(2) 直線 OP の方程式は  $y = \frac{2}{3}x$ , 直線 OQ の方程式は  $y = \frac{8}{3}x$

直線 OP と直線  $y = -2x + k$  の交点を X とすると, その  $x$  座標は

$$\frac{2}{3}x = -2x + k \text{ これを解いて } x = \frac{3}{8}k$$

直線 OQ と直線  $y = -2x + k$  の交点を Y とすると, その  $x$  座標は

$$\frac{8}{3}x = -2x + k \text{ これを解いて } x = \frac{3}{14}k$$

直線  $y = -2x + k$  が四角形 PQRS の面積を 2 等分するとき,  $k > 0$  であることに注意して, 4 点 P, Q, X, Y の  $x$  座標から

$$\frac{OX}{OP} = \frac{3}{16}k, \quad \frac{OY}{OQ} = \frac{3}{14}k$$

ここで,  $\triangle OPQ$  の面積を  $S$  とすると

四角形 PQRS の面積は  $3^2S - S = 8S$

四角形 PQYX の面積は  $\frac{3}{16}k \cdot \frac{3}{14}k \cdot S - S = \left(\frac{9}{16 \cdot 14}k^2 - 1\right)S$

したがって  $\left(\frac{9}{16 \cdot 14}k^2 - 1\right)S = \frac{1}{2} \times 8S$

ゆえに  $k^2 = \frac{16 \cdot 70}{9}$  よって  $k = \frac{4\sqrt{70}}{3}$  ■

- 9 (1)  $f(x) = (x+h)^2$  とおく. 関数  $f(x)$  の  $x = x_1$  から  $x = x_2$  まで変化するときの平均変化率は

$$\begin{aligned}\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{(x_2 + h)^2 - (x_1 + h)^2}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 2h)}{x_2 - x_1} \\ &= x_1 + x_2 + 2h\end{aligned}$$

$A(h)$  は上式に  $x_1 = a^2$ ,  $x_2 = (a+h)^2$  を代入したものであるから

$$\begin{aligned}A(h) &= a^2 + (a+h)^2 + 2h \\ &= \mathbf{2a^2 + 2ah + h^2 + 2h}\end{aligned}$$

- (2) 関数  $f(x)$  の  $x = c$  における微分係数  $f'(c)$  を定義に従って求めると

$$\begin{aligned}f'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{(x+h)^2 - (c+h)^2}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{(x-c)(x+c+2h)}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} (x+c+2h) = 2c + 2h\end{aligned}$$

$B(h)$  は上式に  $c = (a+h)^2$  を代入したものであるから

$$B(h) = 2(a+h)^2 + 2h = \mathbf{2a^2 + 4ah + 2h^2 + 2h}$$

- (3)  $g(h) = B(h) - \{A(h) + 2\}$  とおくと, (1), (2) の結果から

$$\begin{aligned}g(h) &= 2a^2 + 4ah + 2h^2 + 2h - (2a^2 + 2ah + h^2 + 2h + 2) \\ &= h^2 + 2ah - 2\end{aligned}$$

$g'(h) = 2h + 2a$  であるから ( $a > 0$ ),  $h \geq 1$  で  $g(h)$  は単調増加.

$h \geq 1$  であるすべての  $h$  に対して,  $g(h) > 0$  となるには,  $g(1) > 0$  を満たせばよいから

$$1^2 + 2a \cdot 1 - 2 > 0 \quad \text{これを解いて} \quad \mathbf{a > \frac{1}{2}}$$



$$\begin{aligned}
\text{10} \quad \int_{-1}^2 (x-a)(2-x) dx &= \int_{-1}^2 \{(x+1) - (a+1)\}(2-x) dx \\
&= - \int_{-1}^2 (x+1)(x-2) dx + (a+1) \int_{-1}^2 (x-2) dx \\
&= - \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot 3^3 + (a+1) \left[ \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-1}^2 \\
&= \frac{9}{2} + (a+1) \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{9}{2}a,
\end{aligned}$$

$$\int_{-1}^c (x-a) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - ax \right]_{-1}^c = \frac{1}{2}c^2 - ac - a - \frac{1}{2}$$

上の2式を  $\int_{-1}^2 (x-a)(2-x) dx = 3 \int_{-1}^c (x-a) dx$  に代入すると

$$-\frac{9}{2}a = 3 \left( \frac{1}{2}c^2 - ac - a - \frac{1}{2} \right) \quad \text{整理すると} \quad c^2 - 2ac + a - 1 = 0$$

ここで,  $f(c) = c^2 - 2ac + a - 1$  とおくと ( $a > 0$ )

$$f(-1) = 3a > 0, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} < 0, \quad f(2) = 3(1-a)$$

$y = f(c)$  は下に凸の放物線で,  $f(-1) > 0$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$  であるから

$$f(c_1) = 0 \quad \left(-1 < c_1 < \frac{1}{2}\right)$$

をみたす  $c_1$  がただ1つ存在する.

(i)  $0 < a < 1$  のとき,  $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ ,  $f(2) > 0$  であるから

$$f(c_2) = 0 \quad \left(\frac{1}{2} < c_2 < 2\right)$$

をみたす  $c_2$  がただ1つ存在する.

(ii)  $a \geq 1$  のとき,  $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ ,  $f(2) \leq 0$  であるから

$f(c) = 0$  をみたす  $\frac{1}{2} < c < 2$  は存在しない.

よって  $0 < a < 1$  のとき 2個  
 $a \geq 1$  のとき 1個



**11** (1)  $z^5 = 1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ$

したがって、 $z$ を極形式で表すと

$$\begin{aligned} z_k &= \cos \frac{360^\circ \times k}{5} + i \sin \frac{360^\circ \times k}{5} \\ &= \cos(72^\circ \times k) + i \sin(72^\circ \times k) \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

(2)  $z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$  であるから

$$z = 1 \quad \text{または} \quad z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

(i)  $z = 1$  のとき  $z + \frac{1}{z} = 2$

(ii)  $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$  のとき、両辺を  $z^2 \neq 0$  で割ると

$$z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = 0$$

$$t = z + \frac{1}{z} \text{ とおくと } t^2 + t - 1 = 0 \quad \text{これを解いて } t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(i), (ii) より  $z + \frac{1}{z} = 2, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

(3) (1) の結果から  $z_2 = \cos 144^\circ + i \sin 144^\circ$

したがって  $z_2 + \frac{1}{z_2} = z_2 + \frac{\bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = z_2 + \bar{z}_2 = 2 \cos 144^\circ < 0$

上式および (2) の結果から  $z_2 + \frac{1}{z_2} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

よって  $\cos 144^\circ = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$  ■

12 (1)  $s + 2t = 3$  より  $\frac{s}{3} + \frac{2t}{3} = 1$

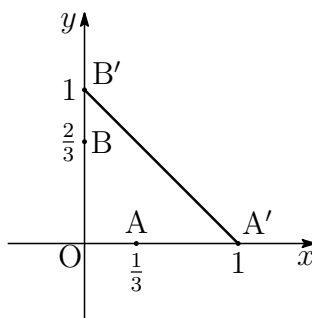
そこで,  $s' = \frac{s}{3}$ ,  $t' = \frac{2t}{3}$  とおくと

$$\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB} = s'(3\vec{OA}) + t'\left(\frac{3}{2}\vec{OB}\right)$$

よって,  $\vec{OA}' = 3\vec{OA} = (1, 0)$ ,  $\vec{OB}' = \frac{3}{2}\vec{OB} = (0, 1)$  とすると

$$\vec{OP} = s'\vec{OA}' + t'\vec{OB}' \quad (s' + t' = 1, s' \geq 0, t' \geq 0)$$

したがって, 点Pの存在範囲は線分A'B'で, 下の図のようになる.



(2) 直線A'B'の方程式は  $x + y - 1 = 0$

点A $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ と直線A'B'の距離を $d$ とすると

$$d = \frac{\left|\frac{1}{3} - 1\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

内積 $\vec{AP} \cdot \vec{AP}$ の最小値は $d^2$ であるから

$$d^2 = \frac{2}{9}$$

