平成15年度　佐賀大学2次試験前期日程(数学問題)
理工・農・文化教育学部　平成15年2月25日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B(120分)
- 農学部は，$\boxed{5}$ ～ $\boxed{8}$ 数I・II・A・B (120分)
- 文化教育学部は，$\boxed{9}$ ～ $\boxed{12}$ 数I・II・A・B(100分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $\triangle$ABCの外接円の半径をR，$\angle$BACをAとするとき，$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A} = 2R$が成立する．このことを

$$\text{(i) } A = \frac{\pi}{2} \text{ の場合，}\quad \text{(ii) } A < \frac{\pi}{2} \text{ の場合，}\quad \text{(iii) } A > \frac{\pi}{2} \text{ の場合}$$

についてそれぞれ証明せよ．

(2) AC $= b$，$\angle$ABC $= \theta$，$\angle$ACB $= 3\theta$ の $\triangle$ABC の辺 BC またはその延長上に $\angle$CAP $= p\theta$ $(p > 0)$ となるように点 P をとる．線分 CP の長さ l を b，p，θ を用いて表せ．

(3) (2) で求めた l の極限値 $\displaystyle\lim_{\theta \to 0} l$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ xy平面上に4つの点E$(1,\ 1)$，F$(4,\ 1)$，G$(4,\ 4)$，H$(1,\ 4)$をとる．また，$m > 0$とし，$y = m^2x^2$で定まる放物線をCとする．次の問いに答えよ．

(1) Cと四角形EFGHが交わるときのmの範囲を求めよ．

(2) Cが四角形EFGHを2つに分割するとき，Cよりも右側にある部分の面積をSとする．Sをmの関数として表せ．

(3) Cが四角形EFGHの面積を2等分するときのmの値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $0 \leqq \alpha,\ \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である実数α，βに対し，複素数z_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を

$$z_n = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n + (\cos\beta + i\sin\beta)^n$$

で定める．次の問いに答えよ．

(1) $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$，$\beta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，z_1，z_2，z_3，z_4 を複素数平面上に図示せよ．

(2) $z_6 = -2$ となる α，β の組をすべて求めよ．

(3) $\alpha = 2\beta$ のとき，$z_6 = 0$ となる α をすべて求めよ．

$\boxed{4}$ xy 平面において，y 軸上の点 A$(0,\ a)$ と曲線 $y = \log x$ 上の点 X$(x,\ \log x)$ を考える．ただし，対数は自然対数とする．

(1) 線分 AX の長さが最短になる点 B はただ 1 つ存在し，線分 AB は点 B における曲線 $y = \log x$ の接線 l と直交することを，以下の手順で証明せよ．

(i) 定数 a に対して，$x^2 + \log x - a = 0$ を満たす x はただ 1 つ存在することを示せ．

(ii) b を，$b^2 + \log b - a = 0$ を満たす実数とする．線分 AX の長さが最短となる点は，B$(b,\ \log b)$ のみであることを示せ．

(iii) 線分 AB は，B$(b,\ \log b)$ における曲線 $y = \log x$ の接線 l と直交することを示せ．

(2) B$(b,\ \log b)$ を，(1) で導いた点とする．線分 AB の長さが，AB $= \sqrt{6}$ となるときの a の値を求めよ．

$\boxed{5}$ △ABC の重心を G とし，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \vec{a}$，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) BP : PA $= 2 : 3$ となる点 P を辺 AB 上にとり，直線 PG と直線 BC が交わる点を Q とする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ を $\vec{c}$ を用いて表せ．

$\boxed{6}$ 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を以下の手順で求めよ．

$$1,\ 2,\ 4,\ 10,\ 23,\ 46,\ 82,\ 134,\ \cdots$$

(1) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする．b_1，b_2，b_3，b_4，b_5 を求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ の階差数列は等差数列である．数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

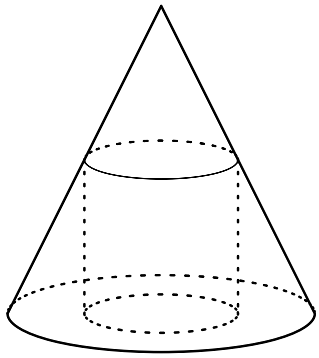
(3) (2) の結果を用いて，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$\boxed{7}$ 底面の半径 r，高さ h の直円錐に図のように内接する円柱について，以下の問いに答えよ．

(1) 円柱の高さを x とするとき，円柱の体積 V を x の式で表せ．

(2) 円柱の体積の最大値 M を求めよ．

(3) r，h が $r+h=3$ をみたすとする．このとき，M の最大値を求めよ．



$\boxed{8}$ xy 平面上の 3 点 O，A，B の座標を，それぞれ $(0,\ 0)$，$(3,\ 0)$，$(0,\ 4)$ とし，線分 AB を 3 等分する 2 点を P，Q とする．

(1) 線分 OP の延長線上に点 S を，線分 OQ の延長線上に点 R をとり，
OP : OS $=$ OQ : OR $= 1 : 3$ とするとき，点 S，R の座標を求めよ．ただし，点 S，R は第一象限にあるものとする．

(2) 直線 $y=-2x+k$ が四角形 PQRS の面積を 2 等分するときの k の値を求めよ．

$\boxed{9}$ a を正の数とする．次の問いに答えよ．

(1) h を正の数とする．x の値が a^2 から $(a+h)^2$ まで変化するときの関数
$y=(x+h)^2$ の平均変化率を $A(h)$ とする．このとき，$A(h)$ を求めよ．

(2) h を実数とする．関数 $y=(x+h)^2$ の $x=(a+h)^2$ における微分係数を $B(h)$ とするとき，$B(h)$ を微分係数の定義に従って求めよ．

(3) $h \geqq 1$ であるすべての h について

$$A(h)+2<B(h)$$

となる a の値の範囲を求めよ．

$\boxed{10}$ a を正の定数とする．等式

$$\int_{-1}^{2}(x-a)(2-x)\,dx = 3\int_{-1}^{c}(x-a)\,dx$$

が成り立つような c の値は $-1<c<2$ の範囲にいくつあるか．

$\boxed{\textbf{11}}$ 方程式 $z^5 = 1$ の解 z について次の問いに答えよ．

(1) z を極形式で表せ．

(2) $z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$ を用いて $z + \dfrac{1}{z}$ の値を求めよ．

(3) $\cos 144^\circ$ の値を求めよ．

$\boxed{\textbf{12}}$ 座標平面上の原点をOとし，点Aの座標を $\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)$，点Bの座標を $\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$ とする．負でない実数 s，t は $s + 2t = 3$ を満たしながら動くものとする．このとき，座標平面上の点Pを

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

により定める．次の問いに答えよ．

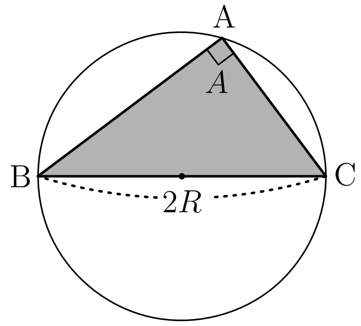
(1) 点Pの存在範囲を図示せよ．

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の最小値を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) (i) $A=\dfrac{\pi}{2}$ の場合

BC は △ABC の直径になる．
外接円の半径は R であるから



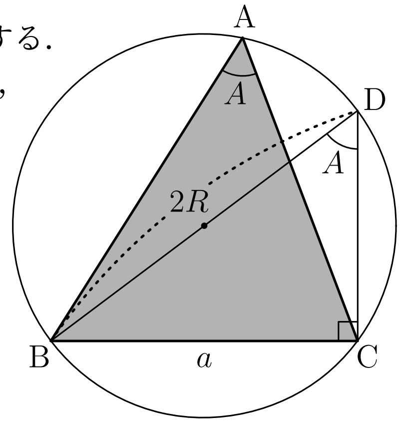
$$\mathrm{BC}=2R$$

一方，$\sin A=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$ であるから

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=2R$$

(ii) $A<\dfrac{\pi}{2}$ の場合

右の図で，線分 BD は △ABC の直径とする．
このとき，円周角と中心角の性質により，



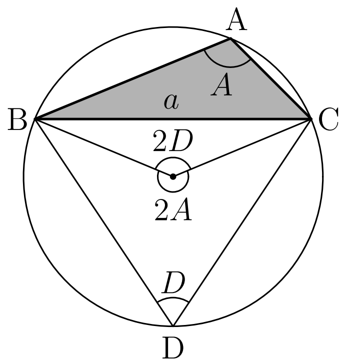
$$\angle\mathrm{BDC}=\angle\mathrm{BAC}=A$$
$$\angle\mathrm{BCD}=\frac{\pi}{2}$$

が成り立つ．また，$\mathrm{BD}=2R$ である．
よって，△BCD において

$$\mathrm{BC}=2R\sin A \quad ゆえに \quad \frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=2R$$

(iii) $A>\dfrac{\pi}{2}$ の場合

△ABC の外接円の周上に，辺 BC に関して点 A とは反対側の点 D をとる．
$\angle\mathrm{BDC}=D$ とすると，円周角と中心角の性質により



$$2A+2D=2\pi \quad すなわち \quad A+D=\pi$$

が成り立つから

$$\sin D=\sin(\pi-A)=\sin A \quad \cdots ①$$

$0<D<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，(i) より △BCD において，

$$\mathrm{BC}=2R\sin D$$

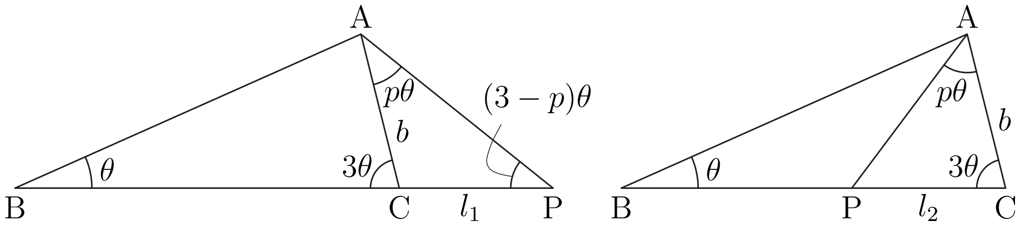
が成り立つ．したがって，① により，

$$\mathrm{BC}=2R\sin A \quad ゆえに \quad \frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=2R$$

(2) 点 P が辺 AC に関して点 B と反対側にあるとき $\mathrm{CP} = l_1$，同じ側にあるとき $\mathrm{CP} = l_2$ とする．$\triangle\mathrm{ACP}$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{l_1}{\sin p\theta} = \frac{b}{\sin(3-p)\theta} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{l_1 = \frac{b\sin p\theta}{\sin(3-p)\theta}}$$

$$\frac{l_2}{\sin p\theta} = \frac{b}{\sin\angle\mathrm{APC}} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{l_2 = \frac{b\sin p\theta}{\sin(3+p)\theta}}$$



(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0} l_1 &= \lim_{\theta\to0}\frac{b\sin p\theta}{\sin(3-p)\theta}\\ &= \lim_{\theta\to0}\frac{\sin p\theta}{p\theta}\cdot\frac{(3-p)\theta}{\sin(3-p)\theta}\cdot\frac{bp}{3-p} = \boldsymbol{\frac{bp}{3-p}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0} l_2 &= \lim_{\theta\to0}\frac{b\sin p\theta}{\sin(3+p)\theta}\\ &= \lim_{\theta\to0}\frac{\sin p\theta}{p\theta}\cdot\frac{(3+p)\theta}{\sin(3+p)\theta}\cdot\frac{bp}{3+p} = \boldsymbol{\frac{bp}{3+p}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) H は C の上側，F は C の下側にあるから

$$4 \geqq m^2 \quad \text{かつ} \quad 1 \leqq 16m^2 \quad m > 0 \text{ に注意して} \quad \boldsymbol{\frac{1}{4} \leqq m \leqq 2}$$

(2) 下の図により，次の (i)〜(iii) の場合に分けて求める．

(i) $\dfrac{1}{4} \leqq m \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$$S = \int_{\frac{1}{m}}^{4} (m^2x^2 - 1)\,dx = \left[\,\frac{m^2x^3}{3} - x\,\right]_{\frac{1}{m}}^{4} = \boldsymbol{\frac{64}{3}m^2 + \frac{2}{3m} - 4}$$

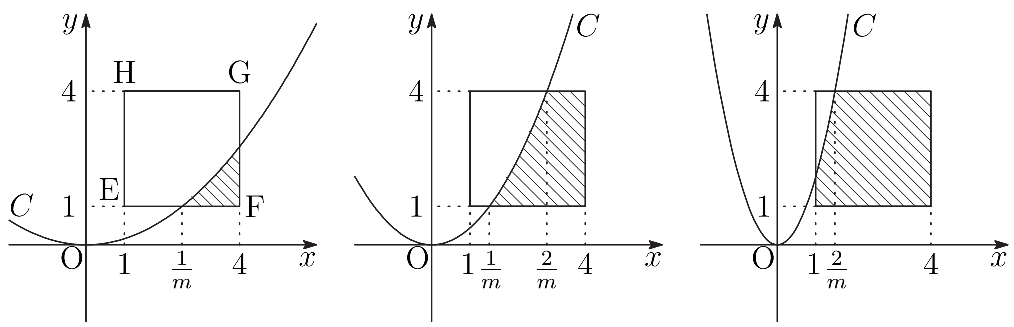
(ii) $\dfrac{1}{2} \leqq m \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{2}{m}} (m^2x^2 - 1)\,dx + 3\left(4 - \frac{2}{m}\right) \\ &= \left[\,\frac{m^2x^3}{3} - x\,\right]_{\frac{1}{m}}^{\frac{2}{m}} + 3\left(4 - \frac{2}{m}\right) = \boldsymbol{-\frac{14}{3m} + 12} \end{aligned}$$

(iii) $1 \leqq m \leqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \int_{1}^{\frac{2}{m}} (m^2x^2 - 1)\,dx + 3\left(4 - \frac{2}{m}\right) \\ &= \left[\,\frac{m^2x^3}{3} - x\,\right]_{1}^{\frac{2}{m}} + 3\left(4 - \frac{2}{m}\right) = \boldsymbol{-\frac{m^2}{3} - \frac{16}{3m} + 13} \end{aligned}$$

(i) $\frac{1}{4} \leqq m \leqq \frac{1}{2}$ のとき　(ii) $\frac{1}{2} \leqq m \leqq 1$ のとき　(iii) $1 \leqq m \leqq 2$ のとき



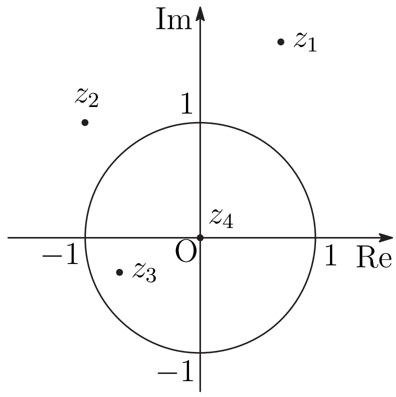
(3) C が四角形 EFGH の面積を 2 等分するのは，(2)-(ii) のときであるから

$$-\frac{14}{3m} + 12 = \frac{1}{2}\cdot 3^2 \quad \text{このとき } \frac{1}{2} \leqq m \leqq 1 \text{ に注意して} \quad \boldsymbol{m = \frac{28}{45}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\alpha=\dfrac{\pi}{2},\ \beta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき

$$\begin{aligned} z_n &= \left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^n+\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n \\ &= \cos\frac{n}{2}\pi+i\sin\frac{n}{2}\pi+\cos\frac{n}{4}\pi+i\sin\frac{n}{4}\pi \\ &= \left(\cos\frac{n}{2}\pi+\cos\frac{n}{4}\pi\right)+i\left(\sin\frac{n}{2}\pi+\sin\frac{n}{4}\pi\right) \end{aligned}$$

したがって
$$\boldsymbol{z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)i,\quad z_2=-1+i,}$$
$$\boldsymbol{z_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)i,\quad z_4=0}$$



(2)
$$\begin{aligned} z_6 &= (\cos\alpha+i\sin\alpha)^6+(\cos\beta+i\sin\beta)^6 \\ &= (\cos 6\alpha+\cos 6\beta)+i(\sin 6\alpha+\sin 6\beta) \end{aligned}$$

$0\leqq\alpha,\ \beta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ および $z_2=-2$ から

$$\cos 6\alpha=-1,\quad \cos 6\beta=-1$$

したがって

$$\boldsymbol{(\alpha,\ \beta)=\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}\right),\ \left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right),\ \left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{6}\right),\ \left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)}$$

(3) $\alpha = 2\beta$ であるから

$$\begin{aligned} z_6 &= (\cos 6\alpha + \cos 6\beta) + i(\sin 6\alpha + \sin 6\beta) \\ &= (\cos 6\alpha + \cos 3\alpha) + i(\sin 6\alpha + \sin 3\alpha) \\ &= (\cos 3\alpha + 1)(2\cos 3\alpha - 1) + i\sin 3\alpha(2\cos 3\alpha + 1) \end{aligned}$$

$z_6 = 0$，$0 \leqq 3\alpha \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ であるから

z_6 の実部から　$3\alpha = \dfrac{\pi}{3}$，π

z_6 の虚部から　$3\alpha = 0$，$\dfrac{2}{3}\pi$，π

ゆえに　$3\alpha = \pi$　よって　$\boldsymbol{\alpha = \dfrac{\pi}{3}}$

$\boxed{4}$ (1) (i) $f(x)=x^2+\log x-a\ (x>0)$ とおくと　$f'(x)=2x+\dfrac{1}{x}>0$

ゆえに，$f(x)$ は単調増加．

また　$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=-\infty$，　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

よって，$f(x)=0$ を満たす x がただ 1 つ存在する．

(ii) (i) の結果から，$f(x)=0$ を満たすただ 1 つの x を b とすると

$$f(b)=0 \qquad \cdots ①$$

$g(x)=\log x$，$d(x)=\mathrm{AX}^2=x^2+\{g(x)-a\}^2$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}d'(x)&=x+\{g(x)-a\}g'(x) \qquad \cdots ②\\ &=x+(\log x-a)\frac{1}{x}=\frac{f(x)}{x}\end{aligned}$$

AX の長さが最短になる点で $d(x)$ は極小となるから，このとき

$$d'(x)=0 \quad \text{すなわち} \quad f(x)=0$$

よって，上式を満たす点は $\mathrm{B}(b,\ \log b)$ のみである．

(iii) (ii) の結果から，$d'(b)=0$ であるから，② より

$$b+\{g(b)-a\}g'(b)=0$$

$y=g(x)$ の B における接ベクトルを $\vec{v}=(1,\ g'(b))$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{v}=b+\{g(b)-a\}g'(b)$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{v}=0$　すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\vec{v}$

よって，線分 AB は，B における曲線の接線 l と直交する．

(2) ① から　$b^2+\log b-a=0 \quad \cdots ③$

$\mathrm{AB}^2=6$ であるから　$b^2+(\log b-a)^2=6 \quad \cdots ④$

③，④ から　$b^2+b^4=6$　ゆえに　$(b^2+3)(b^2-2)=0$

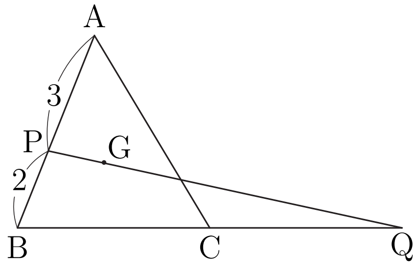
すなわち　$b=\sqrt{2}$　これを ③ に代入して　$\boldsymbol{a=2+\dfrac{1}{2}\log 2}$

$\boxed{5}$ (1) AC の中点を M とすると　$\overrightarrow{\mathrm{BM}} = \dfrac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$

G は BM を 2 : 1 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BG}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BM}} = \boldsymbol{\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{c})}$$

(2) Q は直線 PG 上にあるから (t は実数)



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BQ}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{BP}} + t\overrightarrow{\mathrm{BG}} \\ &= \frac{2}{5}(1-t)\vec{a} + \frac{1}{3}t(\vec{a} + \vec{c}) \\ &= \left(\frac{2}{5} - \frac{t}{15}\right)\vec{a} + \frac{t}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

また，Q は直線 BC 上にあるから

$$\frac{2}{5} - \frac{t}{15} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = 6 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = 2\vec{c}}$$

$\boxed{6}$ (1) $b_1 = 2 - 1 = \mathbf{1},\quad b_2 = 4 - 2 = \mathbf{2},\quad b_3 = 10 - 4 = \mathbf{6},$

$b_4 = 23 - 10 = \mathbf{13},\quad b_5 = 45 - 23 = \mathbf{23}$

(2) (1) の結果から

$$b_2 - b_1 = 1,\quad b_3 - b_2 = 4,\quad b_4 - b_3 = 7,\quad b_5 - b_4 = 10$$

$\{b_n\}$ の階差数列は，初項が 1，公差が 3 の等差数列であるから

$$b_{n+1} - b_n = 1 + (n-1)\cdot 3 = 3n - 2$$

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k) &= \sum_{k=1}^{n-1}(3k-2) \\ b_n - b_1 &= 3\cdot\frac{1}{2}n(n-1) - 2(n-1) \\ b_n &= \frac{1}{2}(3n^2 - 7n + 6)\end{aligned}$$

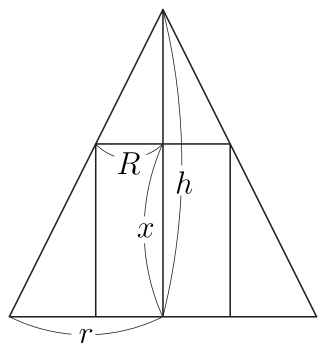
$n = 1$ のときも，上式は成り立つから　$\boldsymbol{b_n = \frac{1}{2}(3n^2 - 7n + 6)}$

(3) $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}(3k^2 - 7k + 6) \\ &= \frac{1}{2}(n^3 - 5n^2 + 10n - 4)\end{aligned}$$

上式は，$n = 1$ のときも成り立つから　$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{2}(n^3 - 5n^2 + 10n - 4)}$

7 (1) 円柱の半径を r とすると



$$\frac{h}{r}=\frac{h-x}{R} \quad \text{ゆえに} \quad R=r\left(1-\frac{x}{h}\right)$$

よって $\quad V=\pi R^2x=\pi r^2\left(1-\frac{x}{h}\right)^2x$

$$=\boldsymbol{\pi r^2\left(\frac{x^3}{h^2}-\frac{2x^2}{h}+x\right)}$$

(2) (1) の結果から $(0<x<h)$

$$\frac{dV}{dx}=\pi r^2\left(\frac{3x^2}{h^2}-\frac{4x}{h}+1\right)=\pi r^2\left(\frac{3x}{h}-1\right)\left(\frac{x}{h}-1\right)$$

V の増減表は，次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{h}{3}$	$\cdots$	(h)
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	$\frac{4}{27}\pi r^2h$	$\searrow$	

よって，V は $x=\dfrac{h}{3}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{M=\dfrac{4}{27}\pi r^2h}$ をとる．

(3) $r+h=3$ のとき $\quad h=3-r \quad$ これを (2) の結果に代入すると

$$M=\frac{4}{27}\pi r^2(3-r)=\frac{4}{27}\pi(3r^2-r^3)$$
$$\frac{dM}{dr}=\frac{4}{27}\pi(6r-3r^2)=\frac{4}{9}\pi r(2-r)$$

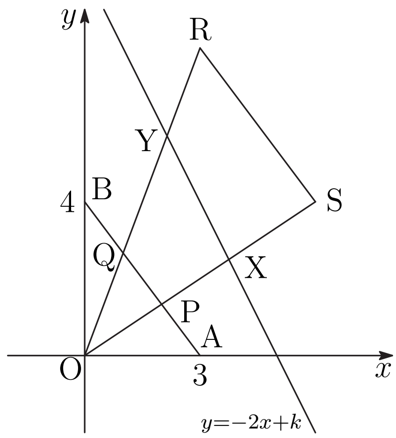
$r>0$，$h=3-r>0$ であるから $\qquad 0<r<3$

このとき，M の増減表は，次のようになる．

r	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
M'		$+$	0	$-$	
M		$\nearrow$	$\frac{16}{27}\pi$	$\searrow$	

よって，M は，$r=2$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{16\pi}{27}}$ をとる．

$\boxed{\textbf{8}}$ (1) P は AB を $1:2$ に内分する点であるから



$$\left(\frac{2\cdot3+1\cdot0}{1+2},\ \frac{2\cdot0+1\cdot4}{1+2}\right) \text{ より } \quad \mathrm{P}\left(2,\ \frac{4}{3}\right)$$

Q は AB を $2:1$ に内分する点であるから

$$\left(\frac{1\cdot3+2\cdot0}{2+1},\ \frac{1\cdot0+2\cdot4}{2+1}\right) \text{ より } \quad \mathrm{Q}\left(1,\ \frac{8}{3}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=3\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=3\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であるから

$$\mathbf{S(6,\ 4),\ R(3,\ 8)}$$

(2) 直線 OP の方程式は　$y=\dfrac{2}{3}x$，　直線 OQ の方程式は　$y=\dfrac{8}{3}x$

直線 OP と直線 $y=-2x+k$ の交点を X とすると，その x 座標は

$$\frac{2}{3}x=-2x+k \quad \text{これを解いて} \quad x=\frac{3}{8}k$$

直線 OQ と直線 $y=-2x+k$ の交点を Y とすると，その x 座標は

$$\frac{8}{3}x=-2x+k \quad \text{これを解いて} \quad x=\frac{3}{14}k$$

直線 $y=-2x+k$ が四角形 PQRS の面積を 2 等分するとき，$k>0$ であることに注意して，4 点 P，Q，X，Y の x 座標から

$$\frac{\mathrm{OX}}{\mathrm{OP}}=\frac{3}{16}k, \quad \frac{\mathrm{OY}}{\mathrm{OQ}}=\frac{3}{14}k$$

ここで，△OPQ の面積を S とすると

四角形 PQRS の面積は　　$3^2S-S=8S$

四角形 PQYX の面積は　　$\dfrac{3}{16}k\cdot\dfrac{3}{14}k\cdot S-S=\left(\dfrac{9}{16\cdot14}k^2-1\right)S$

したがって　　$\left(\dfrac{9}{16\cdot14}k^2-1\right)S=\dfrac{1}{2}\times8S$

ゆえに　　$k^2=\dfrac{16\cdot70}{9}$　　よって　$\boldsymbol{k=\dfrac{4\sqrt{70}}{3}}$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $f(x)=(x+h)^2$ とおく．関数 $f(x)$ の $x=x_1$ から $x=x_2$ まで変化するときの平均変化率は

$$\begin{aligned}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}&=\frac{(x_2+h)^2-(x_1+h)^2}{x_2-x_1}\\&=\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1+2h)}{x_2-x_1}\\&=x_1+x_2+2h\end{aligned}$$

$A(h)$ は上式に $x_1=a^2$，$x_2=(a+h)^2$ を代入したものであるから

$$\begin{aligned}A(h)&=a^2+(a+h)^2+2h\\&=\boldsymbol{2a^2+2ah+h^2+2h}\end{aligned}$$

(2) 関数 $f(x)$ の $x=c$ における微分係数 $f'(c)$ を定義に従って求めると

$$\begin{aligned}f'(c)&=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lim_{x\to c}\frac{(x+h)^2-(c+h)^2}{x-c}\\&=\lim_{x\to c}\frac{(x-c)(x+c+2h)}{x-c}\\&=\lim_{x\to c}(x+c+2h)=2c+2h\end{aligned}$$

$B(h)$ は上式に $c=(a+h)^2$ を代入したものであるから

$$B(h)=2(a+h)^2+2h=\boldsymbol{2a^2+4ah+2h^2+2h}$$

(3) $g(h)=B(h)-\{A(h)+2\}$ とおくと，(1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned}g(h)&=2a^2+4ah+2h^2+2h-(2a^2+2ah+h^2+2h+2)\\&=h^2+2ah-2\end{aligned}$$

$g'(h)=2h+2a$ であるから $(a>0)$，$h\geqq 1$ で $g(h)$ は単調増加.
$h\geqq 1$ であるすべての h に対して，$g(h)>0$ となるには，$g(1)>0$ を満たせばよいから

$$1^2+2a\cdot 1-2>0\quad これを解いて\quad \boldsymbol{a>\frac{1}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{10}}$

$$\int_{-1}^{2}(x-a)(2-x)\,dx=\int_{-1}^{2}\{(x+1)-(a+1)\}(2-x)\,dx$$
$$=-\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)\,dx+(a+1)\int_{-1}^{2}(x-2)\,dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot 3^3+(a+1)\left[\,\frac{x^2}{2}-2x\,\right]_{-1}^{2}$$
$$=\frac{9}{2}+(a+1)\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)=-\frac{9}{2}a,$$
$$\int_{-1}^{c}(x-a)\,dx=\left[\,\frac{x^2}{2}-ax\,\right]_{-1}^{c}=\frac{1}{2}c^2-ac-a-\frac{1}{2}$$

上の 2 式を $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x-a)(2-x)\,dx=3\int_{-1}^{c}(x-a)\,dx$ に代入すると

$$-\frac{9}{2}a=3\left(\frac{1}{2}c^2-ac-a-\frac{1}{2}\right)\quad \text{整理すると}\quad c^2-2ac+a-1=0$$

ここで，$f(c)=c^2-2ac+a-1$ とおくと $(a>0)$

$$f(-1)=3a>0,\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}<0,\quad f(2)=3(1-a)$$

$y=f(c)$ は下に凸の放物線で，$f(-1)>0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$ であるから

$$f(c_1)=0\quad\left(-1<c_1<\frac{1}{2}\right)$$

をみたす c_1 がただ 1 つ存在する．

(i) $0<a<1$ のとき，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$，$f(2)>0$ であるから

$$f(c_2)=0\quad\left(\frac{1}{2}<c_2<2\right)$$

をみたす c_2 がただ 1 つ存在する．

(ii) $a\geqq 1$ のとき，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$，$f(2)\leqq 0$ であるから

$f(c)=0$ をみたす $\dfrac{1}{2}<c<2$ は存在しない．

よって　　**$0<a<1$ のとき　2 個**

$a\geqq 1$ のとき　　1 個

$\boxed{\mathbf{11}}$ (1) $z^5 = 1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ$

したがって，z を極形式で表すと

$$\begin{aligned} z_k &= \cos \frac{360^\circ \times k}{5} + i \sin \frac{360^\circ \times k}{5} \\ &= \boldsymbol{\cos(72^\circ \times k) + i \sin(72^\circ \times k) \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)} \end{aligned}$$

(2) $z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$ であるから

$$z = 1 \quad \text{または} \quad z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

(i) $z = 1$ のとき　$z + \dfrac{1}{z} = 2$

(ii) $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ のとき，両辺を $z^2 \neq 0$ で割ると

$$z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = 0$$

$t = z + \dfrac{1}{z}$ とおくと　$t^2 + t - 1 = 0$　これを解いて　$t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

(i)，(ii) より　$\boldsymbol{z + \dfrac{1}{z} = 2,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}}$

(3) (1) の結果から　$z_2 = \cos 144^\circ + i \sin 144^\circ$

したがって　$z_2 + \dfrac{1}{z_2} = z_2 + \dfrac{\overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = z_2 + \overline{z_2} = 2 \cos 144^\circ < 0$

上式および (2) の結果から　$z_2 + \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

よって　$\boldsymbol{\cos 144^\circ = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{4}}$

$\boxed{\textbf{12}}$ (1) $s+2t=3$ より　　$\dfrac{s}{3}+\dfrac{2t}{3}=1$

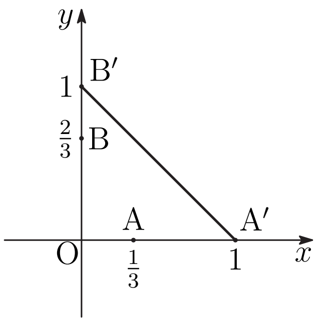
そこで，$s'=\dfrac{s}{3}$，$t'=\dfrac{2t}{3}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s'(3\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t'\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(0,\ 1)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+t'\overrightarrow{\mathrm{OB'}}\qquad(s'+t'=1,\ s'\geqq 0,\ t'\geqq 0)$$

したがって，点 P の存在範囲は線分 A′B′ で，下の図のようになる．



(2) 直線 A′B′ の方程式は　　$x+y-1=0$

点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)$ と直線 A′B′ の距離を d とすると

$$d=\frac{\left|\frac{1}{3}-1\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

内積 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の最小値は d^2 であるから

$$d^2=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$$