平成14年度　佐賀大学2次試験前期日程(数学問題)
理工・農・文化教育学部　平成14年2月25日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B(120分)
- 農学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数I・II・A・B (120分)
- 文化教育学部は，$\boxed{7}$ ～ $\boxed{10}$ 数I・II・A・B(100分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が初項 $a_1=1$，$b_1=1$ であり，また

$$a_{n+1}=2a_n+b_n+2,\quad b_{n+1}=a_n+2b_n$$

の関係を満たしているとする．このとき次の問いに答えよ．

(1) a_3，b_3 を求めよ．

(2) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n=a_n+b_n$ で定めたとき，その一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $f(x)$，$g(x)$ は，次の式を満たすものとする．

$$f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x+2}},\quad g(x)=3x^2+\int_{-1}^{1}(x+t)g(t)\,dt$$

(1) $f(x)$ を微分せよ．

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ を求めよ．

(3) $b=\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$，$c=\displaystyle\int_{-1}^{1} tg(t)\,dt$ とおいて，$g(x)$ を b，c で表せ．さらに，b，c を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の問いに答えよ．

(1) a が正の数で，$a\neq 1$ のとき，$\log_a(4+3x-x^2)-\log_a(2x-1)>\log_a 2$ を満たす x の値の範囲を求めよ．

(2) $4^x-6^x-2{\cdot}9^x \geqq 0$ を満たす x の範囲を求めよ．

$\boxed{4}$ ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ は平行でなく，$\vec{0}$ でもないとする．座標平面の原点 O を通り $\vec{a}$, $\vec{b}$ に平行な直線上の点 P，Q は媒介変数 t を使って $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (t-1)\vec{b}$ と表す．このとき以下の問いに答えよ．

(1) t を固定して 2 点 P，Q を通る直線 l_t 上の点 M を，s を媒介変数とするベクトル方程式で表せ．

(2) t と h $(h \neq 0)$ を固定して 2 直線 l_t，l_{t+h} の交点を R としたとき，R の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, t, h で表せ．

(3) 交点 R の座標を $(X,\ Y)$ とおき，m を正定数として $\vec{a} = (1,\ m)$, $\vec{b} = (1, -m)$ とおく．ここで $h \to 0$ としたときの座標の極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0} X$, $\displaystyle\lim_{h\to 0} Y$ を求めよ．

(4) $X(t) = \displaystyle\lim_{h\to 0} X$, $Y(t) = \displaystyle\lim_{h\to 0} Y$ とおいて t を変化させたとき，点 $(X(t),\ Y(t))$ が描く軌跡を求めよ．

(5) l_t はこの軌跡に接することを示せ．

$\boxed{5}$ θ の範囲が $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であり，$x = \sin\theta + \cos\theta$ とする．

(1) $x = 0$ となる θ の値を求めよ．

(2) x の値の範囲を求めよ．

(3) a を実数とするとき，$y = a\sin\theta - \sin\theta\cos\theta + a\cos\theta$ を，a, x を用いて表せ．

(4) y の最小値を求めよ．

$\boxed{6}$ 原点 O$(0,\ 0)$ を通る直線 m が次式で与えられている．

$$m : x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0 \quad \text{ただし } 45^\circ < \alpha < 135^\circ \text{ とする．}$$

(1) 点 A$(2,\ 2)$ を通り，直線 m に直交する直線 n の方程式を求めよ．

(2) 直線 m と直線 n との交点 B の座標を求めよ．

(3) 線分 AB の長さを α で表せ．

(4) $\triangle$OAB の面積 S を α で表せ．

(5) 面積 S が最大となるときの α を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ k を 2 以上の整数とする．k 個のサイコロを 2 回投げる．この 2 回のうち少なくとも 1 回は k 個のサイコロの出た目が同一となる確率を p_k とおく．次の問いに答えよ．

(1) p_k を k を用いて表せ．

(2) $p_k < 0.1$ となるような k の値の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ p を正の定数とする．関数

$$f(x) = x^3 - 3(p+1)x^2 + 12px$$

の $x \geqq 0$ における最小値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 複素数 z についての次の方程式を解き，その解を複素数平面上に図示せよ．

$$(z-i)^4 = -2 - 2\sqrt{3}\,i$$

ただし，i は虚数単位とする．

$\boxed{\mathbf{10}}$ O を原点とする xyz 座標空間の 2 点 A(1, 1, 0)，B(−1, 3, 4) を通る直線 g が，yz 平面と交わる点を C とする．直線 g 上の点 P_0，P_1，P_2，P_3 を順次，次のように定める．

(i) 点 P_0 は，2 点 A，B の間にあり，$\overrightarrow{\mathrm{AP}_0}$ が単位ベクトルである．

(ii) 点 P_i $(i = 1, 2, 3)$ は，線分 AP_{i-1} を $3:1$ の比に外分する点である．

次の問いに答えよ．

(1) 点 P_0 の座標を求めよ．

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}_0}$ を用いて表せ．

(3) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_3}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の大きさを求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $a_2 = 2a_1 + b_1 + 2 = 5,\quad b_2 = a_1 + 2b_1 = 3,$
$a_3 = 2a_2 + b_2 + 2 = \mathbf{15},\quad b_3 = a_2 + 2b_2 = \mathbf{11}$

(2)
$$a_{n+1} = 2a_n + b_n + 2,\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \quad \cdots (*)$$

$(*)$ の辺々を加えると

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 3(a_n + b_n) + 2 \quad \text{すなわち} \quad c_{n+1} = 3c_n + 2$$

したがって　$c_{n+1} + 1 = 3(c_n + 1),\quad c_1 + 1 = a_1 + b_1 + 1 = 3$

数列 $\{c_n + 1\}$ は，初項 3，公比 3 の等比数列であるから

$$c_n + 1 = 3\cdot 3^{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{c_n = 3^n - 1}$$

(3) $(*)$ の辺々を引くと　$a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - b_n + 2$

$d_n = a_n - b_n$ とおくと　$d_{n+1} = d_n + 2,\quad d_1 = a_1 - b_1 = 0$

数列 $\{d_n\}$ は，初項 0，公差 2 の等差数列であるから

$$d_n = 0 + 2(n-1) \quad \text{よって} \quad d_n = 2n - 2$$

(2) の結果および上式から

$$a_n + b_n = 3^n - 1,\quad a_n - b_n = 2n - 2$$

よって　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{3^n + 2n - 3}{2}},\ \boldsymbol{b_n = \dfrac{3^n - 2n + 1}{2}}$

(4) (3) の結果から

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(3^k + 2k - 3) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} + 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - 3n\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3^{n+1} - 3}{2} + n^2 - 2n\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}(3^{n+1} + 2n^2 - 4n - 3)} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x+2}}$ より

$$f'(x)=\frac{(3x)'\sqrt{x+2}-3x(\sqrt{x+2}\,)'}{(\sqrt{x+2})^2}=\frac{3\sqrt{x+2}-\dfrac{3x}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$
$$=\frac{6(x+2)-3x}{2(x+2)\sqrt{x+2}}=\boldsymbol{\frac{3(x+4)}{2(x+2)\sqrt{x+2}}}$$

(2) $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{3(x+2)-6}{\sqrt{x+2}}=3\sqrt{x+2}-\dfrac{6}{\sqrt{x+2}}$ より

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx=\Big[\ 2(x+2)^{\frac{3}{2}}-12(x+2)^{\frac{1}{2}}\ \Big]_{-1}^{2}=\mathbf{2}$$

(3) $g(x)=3x^2+\displaystyle\int_{-1}^{1}(x+t)g(t)\,dt=3x^2+x\int_{-1}^{1}g(t)\,dt+\int_{-1}^{1}tg(t)\,dt$

よって　$\boldsymbol{g(x)=3x^2+bx+c}$

したがって　$b=\displaystyle\int_{-1}^{1}g(t)\,dt=\int_{-1}^{1}(3t^2+bt+c)\,dt$

$$=\Big[\ t^3+\frac{1}{2}bt^2+ct\ \Big]_{-1}^{1}=2c+2,$$

$$c=\int_{-1}^{1}tg(t)\,dt=\int_{-1}^{1}(3t^3+bt^2+ct)\,dt$$

$$=\Big[\ \frac{3}{4}t^4+\frac{1}{3}bt^3+\frac{1}{2}ct^2\ \Big]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}b$$

ゆえに　$b=2c+2,\ c=\dfrac{2}{3}b$　これを解いて　$\boldsymbol{b=-6,\ \ c=-4}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 与えられた不等式から　$\log_a(4+3x-x^2)>\log_a 2(2x-1)$

i) $a>1$ のとき

$$4+3x-x^2>2(2x-1)>0 \quad \text{これを解いて} \quad \frac{1}{2}<x<2$$

ii) $0<a<1$ のとき

$$0<4+3x-x^2<2(2x-1) \quad \text{これを解いて} \quad 2<x<4$$

よって　$\begin{cases} \boldsymbol{1<a}\ \textbf{のとき} & \boldsymbol{\dfrac{1}{2}<x<2} \\ \boldsymbol{0<a<1}\ \textbf{のとき} & \boldsymbol{2<x<4} \end{cases}$

(2) $4^x-6^x-2{\cdot}9^x \geqq 0$ から

$$(2^x)^2-2^x{\cdot}3^x-2(3^x)^2 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (2^x+3^x)(2^x-2{\cdot}3^x) \geqq 0$$

$2^x>0$，$3^x>0$ であるから　　$2^x \geqq 2{\cdot}3^x$

上式の両辺を 2 を底とする対数をとると

$$x \geqq 1+x\log_2 3 \quad \text{ゆえに} \quad (1-\log_2 3)x \geqq 1$$

$1-\log_2 3<0$ であることに注意して　　$\boldsymbol{x \leqq \dfrac{1}{1-\log_2 3}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1)

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(t-1)\vec{b}-t\vec{a}$$

2 点 P，Q を通る直線 l_t 上の点 M の s を媒介変数とするベクトル方程式は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=t\vec{a}+s\{(t-1)\vec{b}-t\vec{a}\}\\&=\boldsymbol{(1-s)t\vec{a}+s(t-1)\vec{b}}\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から，直線 l_{t+h} の s を媒介変数とするとベクトル方程式は

$$(1-s)(t+h)\vec{a}+s(t+h-1)\vec{b}$$

点 R は，2 直線 l_t，l_{t+h} の交点であるから，(1) の結果および上式から

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-s_1)t\vec{a}+s_1(t-1)\vec{b} \qquad \cdots ①$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-s_2)(t+h)\vec{a}+s_2(t+h-1)\vec{b} \qquad \cdots ②$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから，①，② より

$$(1-s_1)t=(1-s_2)(t+h), \quad s_1(t-1)=s_2(t+h-1)$$

すなわち　$-ts_1+(t+h)s_2=h, \quad (1-t)s_1+(t+h-1)s_2=0$

上の 2 式から，s_1 を消去すると

$$\{(1-t)(t+h)+t(t+h-1)\}s_2=h(1-t)$$

整理すると　$hs_2=h(1-t)$　条件により $h \neq 0$ であるから　$s_2=1-t$

これを ② に代入して　　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\boldsymbol{t(t+h)\vec{a}+(1-t)(t+h-1)\vec{b}}$

(3) (2) の結果から，R の座標 $(X,\ Y)$ は

$$(X,\ Y) = t(t+h)\vec{a} + (1-t)(t+h-1)\vec{b}$$
$$= t(t+h)(1,\ m) + (1-t)(t+h-1)(1, -m)$$

したがって

$$\lim_{h\to 0} X = t^2{\cdot}1 + (1-t)(t-1){\cdot}1 = \boldsymbol{2t-1}$$
$$\lim_{h\to 0} Y = t^2{\cdot}m + (1-t)(t-1){\cdot}(-m) = \boldsymbol{m(2t^2-2t+1)}$$

(4) $$2t^2 - 2t + 1 = \frac{1}{2}(4t^2-4t+1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2t-1)^2 + \frac{1}{2}$$

点 $(X(t),\ Y(t))$ の描く軌跡の方程式は，上式および (3) の結果から

$$y = m\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \textbf{放物線}\ \boldsymbol{y = \frac{m}{2}(x^2+1)}$$

(5) (1) で求めた l_t のベクトル方程式から

$$(x,\ y) = (1-s)t\vec{a} + s(t-1)\vec{b}$$
$$= (1-s)t(1,\ m) + s(t-1)(1, -m)$$
$$= (-s+t,\ m\{(1-2t)s+t\})$$

上の 2 式から媒介変数 s を消去すると，l_t の方程式は

$$y = m\{(2t-1)x + t - t^2\}$$

この直線の方程式と (4) で求めた放物線の方程式の共有点の x 座標は

$$\frac{m}{2}(x^2+1) = m\{(2t-1)x + 2t - 2t^2\}$$

ここで，$\vec{a} = (1,\ m)$ と $\vec{b} = (1, -m)$ は平行ではないので　$m \neq 0$

したがって　$$(x - 2t + 1)^2 = 0$$

この方程式は重解をもつので，l_t は (4) で求めた軌跡に接する．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1)

$$x = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + 45^\circ)$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$45^\circ \leqq \theta + 45^\circ \leqq 225^\circ$ であるから，$x = 0$ となるのは

$$\theta + 45^\circ = 180^\circ \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\theta = 135^\circ}$$

(2) $45^\circ \leqq \theta + 45^\circ \leqq 225^\circ$ であるから

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin(\theta + 45^\circ) \leqq 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{-1 \leqq x \leqq \sqrt{2}}$$

(3) $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2}(\sin\theta + \cos\theta)^2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}(x^2 - 1)$ であるから

$$\begin{aligned} y &= -\sin\theta\cos\theta + a(\sin\theta + \cos\theta) \\ &= -\frac{1}{2}(x^2 - 1) + ax = \boldsymbol{-\frac{1}{2}x^2 + ax + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(4) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + ax + \dfrac{1}{2}$ とおくと，(3) の結果から

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x - a)^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}$$

定義域 $-1 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ の中央が $\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$ であるから

$$\frac{\sqrt{2} - 1}{2} \leqq a \text{ のとき，} f(x) \text{ の最小値は } f(-1)$$

$$a < \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \text{ のとき，} f(x) \text{ の最小値は } f(\sqrt{2})$$

よって，求める y の最小値は

$$\begin{cases} \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2} \leqq a} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{-a} \\ \boldsymbol{a < \dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{\sqrt{2}a - \dfrac{1}{2}} \end{cases}$$

6 (1) 直線 n の方程式は　　$(x-2)\cos\alpha+(y-2)\sin\alpha$

すなわち　　$\boldsymbol{x\cos\alpha+y\sin\alpha-2(\cos\alpha+\sin\alpha)=0}$

(2) 2 直線 m，n の方程式は，それぞれ

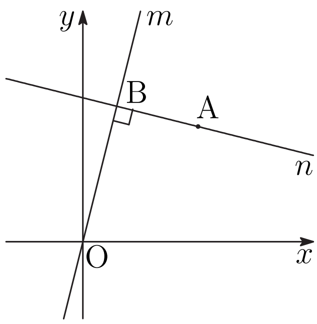
$$x\sin\alpha-y\cos\alpha=0 \qquad \cdots①$$
$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=2(\cos\alpha+\sin\alpha) \qquad \cdots②$$

① $\times\sin\alpha+$ ② $\times\cos\alpha$ より　　$x=2\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)$

② $\times\sin\alpha-$ ① $\times\cos\alpha$ より　　$y=2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)$

よって　$\mathbf{B}(\boldsymbol{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha),\ 2\sin\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)})$

(3) AB は点 A と直線 m の距離であるから



$$\mathrm{AB}=\frac{|2\sin\alpha-2\cos\alpha|}{\sqrt{(\sin\alpha)^2+(-\cos\alpha)^2}}$$
$$=2|\sin\alpha-\cos\alpha|$$

$45^\circ<\alpha<135^\circ$ より，$\sin\alpha>\cos\alpha$ であるから

$\mathbf{AB}=\boldsymbol{2(\sin\alpha-\cos\alpha)}$

(4) (2) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$

したがって　　$\mathrm{OB}=2|\cos\alpha+\sin\alpha|$

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{OB}=\frac{1}{2}\cdot2(\sin\alpha-\cos\alpha)\cdot2|\cos\alpha+\sin\alpha|$$
$$=2|\sin^2\alpha-\cos^2\alpha|=2|-\cos2\alpha|$$

$45^\circ<\alpha<135^\circ$ より，$90^\circ<2\alpha<270^\circ$ であるから　$-\cos2\alpha>0$

よって　　$\boldsymbol{S=-2\cos2\alpha}$

(5) (4) の結果から，S が最大となるのは，$\cos2\alpha=-1$ のときであるから

$2\alpha=180^\circ$　すなわち　$\boldsymbol{\alpha=90^\circ}$

$\boxed{\textbf{7}}$ (1) k 個のサイコロを 1 回投げて，出た目が同一である確率は

$$\frac{6}{6^k} = \frac{1}{6^{k-1}}$$

k 個のサイコロを 2 回投げて，2 回とも出た目が同一でない確率は

$$\left(1 - \frac{1}{6^{k-1}}\right)^2$$

よって，求める確率 p_k は，この余事象の確率であるから

$$\boldsymbol{p_k = 1 - \left(1 - \frac{1}{6^{k-1}}\right)^2}$$

(2) $p_k < 0.1$ のとき，(1) の結果から

$$1 - \left(1 - \frac{1}{6^{k-1}}\right)^2 < 0.1 \quad \text{ゆえに} \quad \left(1 - \frac{1}{6^{k-1}}\right)^2 > \frac{9}{10}$$

したがって $$\left|1 - \frac{1}{6^{k-1}}\right| > \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$k \geqq 2$ のとき，$1 - \dfrac{1}{6^{k-1}} > 0$ であるから

$$1 - \frac{1}{6^{k-1}} > \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \text{ゆえに} \quad 6^{k-1} > \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}-3} = 10 + \sqrt{90} \quad \cdots (*)$$

ここで，$9 < \sqrt{90} < 10$ であるから，$19 < 10 + \sqrt{90} < 20$

$(*)$ を満たす k の値の範囲は

$$k - 1 \geqq 2 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{k \geqq 3}$$

$\boxed{8}$ $f(x) = x^3 - 3(p+1)x^2 + 12px$ を微分すると

$$f'(x) = 3x^2 - 6(p+1)x + 12p = 3(x-2)(x-2p)$$

したがって　$f(0) = 0$，$f(2) = 4(3p-1)$，$f(2p) = 4p^2(3-p)$

(i) $2p < 2$　すなわち　$p < 1$ のとき

x	0	$\cdots$	$2p$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↗	極大	↘	極小	↗

$f(2) - f(0) = 4(3p-1)$ であるから

$$0 < p < \frac{1}{3} \text{ のとき最小値 } f(2), \quad \frac{1}{3} \leqq p < 1 \text{ のとき最小値 } f(0)$$

(ii) $2p = 2$　すなわち　$p = 1$ のとき

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$+$
$f(x)$	0	↗	8	↗

最小値は $f(0)$

(iii) $2 < 2p$　すなわち　$1 < p$ のとき

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	2p	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↗	極大	↘	極小	↗

$f(2p) - f(0) = 4p^2(3-p)$ であるから

$$1 < p < 3 \text{ のとき最小値 } f(0), \quad 3 \leqq p \text{ のとき最小値 } f(2p)$$

(i)〜(iii) から，求める最小値は

$$\begin{cases} \boldsymbol{0 < p < \frac{1}{3}} \textbf{のとき} & \boldsymbol{4(3p-1)} \\ \boldsymbol{\frac{1}{3} \leqq p < 3} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{3 \leqq p} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{4p^2(3-p)} \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ $-2-2\sqrt{3}\,i=4\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=(\sqrt{2})^4\left(\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi\right)$ であるから，

整数 n を用いて

$$(z-i)^4=-2-2\sqrt{3}\,i=(\sqrt{2})^4\left\{\cos\left(2n+\frac{4}{3}\right)\pi+i\sin\left(2n+\frac{4}{3}\right)\pi\right\}$$

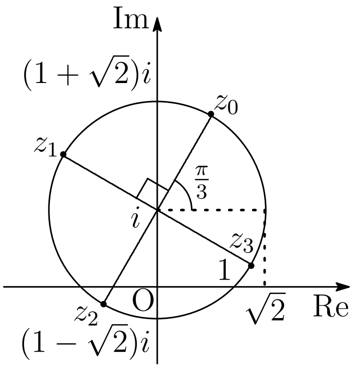
したがって　　$z-i=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\dfrac{n}{2}+\dfrac{1}{3}\right)\pi+i\sin\left(\dfrac{n}{2}+\dfrac{1}{3}\right)\pi\right\}$

ゆえに，これらの解は

$$z_n-i=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{3}\right)\pi+i\sin\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{3}\right)\pi\right\}\quad(n=0,1,2,3)$$

である．よって

$$\boldsymbol{z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2+\sqrt{6}}{2}i,}$$
$$\boldsymbol{z_1=-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{2+\sqrt{2}}{2}i,}$$
$$\boldsymbol{z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2-\sqrt{6}}{2}i,}$$
$$\boldsymbol{z_3=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{2-\sqrt{2}}{2}i}$$



$\boxed{\mathbf{10}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{AP_0}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と同じ向きの単位ベクトルであるから　$\overrightarrow{\mathrm{AP_0}} = \dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-1,\ 3,\ 4) - (1,\ 1,\ 0) = (-2,\ 2,\ 4)$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 4^2} = 2\sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP_0}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}(-2,\ 2,\ 4) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,\ 1,\ 2)$$

したがって
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP_0}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP_0}}\\ &= (1,\ 1,\ 0) + \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,\ 1,\ 2)\\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{6}},\ 1 + \frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\end{aligned}$$

よって　$\mathbf{P_0\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{6}},\ 1 + \dfrac{1}{\sqrt{6}},\ \dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)}$

(2) 3 点 A，$\mathrm{P_0}$，C は同一直線上にあるから　$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AP_0}}$ (k は実数)

したがって
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + k\overrightarrow{\mathrm{AP_0}}\\ &= (1,\ 1,\ 0) + \frac{k}{\sqrt{6}}(-1,\ 1,\ 2)\\ &= \left(1 - \frac{k}{\sqrt{6}},\ 1 + \frac{k}{\sqrt{6}},\ \frac{2k}{\sqrt{6}}\right)\end{aligned}$$

点 C は yz 平面の点であるから

$$1 - \frac{k}{\sqrt{6}} = 0 \quad \text{これを解いて} \quad k = \sqrt{6}$$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \sqrt{6}\,\overrightarrow{\mathrm{AP_0}}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AP}_i} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}_{i-1}}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AP}_i} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^i\overrightarrow{\mathrm{AP_0}}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}_i} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}_i} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^i\overrightarrow{\mathrm{AP_0}}$

このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \sqrt{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP_0}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AP_0}}| = 1$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + \frac{3^{2i}}{2^{2i}}|\overrightarrow{\mathrm{AP_0}}|^2 = 2 + \frac{3^{2i}}{2^{2i}} = \frac{2^{2i+1} + 3^{2i}}{2^{2i}}$$

すなわち　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}| = \dfrac{\sqrt{2^{2i+1}+3^{2i}}}{2^i}$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}| = \dfrac{\sqrt{2^5+3^4}}{2^2} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{113}}{4}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}_3}| = \dfrac{\sqrt{2^7+3^6}}{2^3} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{857}}{8}}$

また，(2) の結果から　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + 6|\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}|^2 = 2 + 6 = 8$

よって　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 2\sqrt{2}}$