平成13年度　佐賀大学2次試験前期日程(数学問題)
理工・農・文化教育学部　平成13年2月25日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B(120分)
- 農学部は，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ の(1)(2)(3)(5)，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$ 数I・II・A・B (120分)
- 文化教育学部は，$\boxed{7}$ 〜 $\boxed{10}$ 数I・II・A・B(100分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 2次関数 $y = 4x^2 + 8mx + 4m$ について，以下の問いに答えよ．

(1) この2次関数の最小値 l を，m の式で表せ．

(2) (1)の l が正であるための m の値の範囲を求めよ．

(3) m の値を変化させて，(1)の l が最も大きくなるときの m の値と，そのときの l の値を求めよ．

(4) (1)の l に定数 a を加えて得られる m の関数を $n = f(m)$ とする．この関数のグラフが m 軸と1点で接するように，a の値を定めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ は $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ をみたし，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ は $0^\circ < \theta < 180^\circ$ をみたすとする．また，ベクトル $\vec{c}$，$\vec{d}$ は p，q，s，t を用いて

$$\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}, \quad \vec{d} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

と表されるとし，$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ が成立しているとする．

(1) p と s の関係式，および q と t との関係式を求めよ．

(2) $|\vec{c}| = 1$ のとき，p と q と $\cos\theta$ との関係式を求めよ．

(3) $|\vec{d}| = 1$ のとき，(1)の結果を用いて，p，q と $\cos\theta$ との関係式を求めよ．

(4) $|\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$ のとき，

$$\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d} = \vec{0} \quad \text{または} \quad \vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

が成り立つことを，上の結果を用いて示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 1回の試行で事象 A が起こる確率が p $(0 < p < 1)$ であるとする．この試行を n 回行うときに奇数回 A が起こる確率を a_n とする．

(1) a_1，a_2，a_3 を p で表せ．

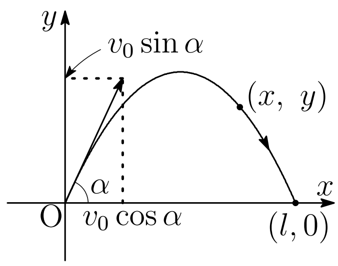
(2) $n \geqq 2$ のとき，a_n を a_{n-1} と p で表せ．

(3) a_n を n と p で表せ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ の値を求めよ．

(5) $p = \dfrac{1}{2}$ のときの (3) の結果を用いて，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_{2n}\mathrm{C}_{2k}$ を n の式で表せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 右の図のように，原点Oから物体Pを，水平面と角 α $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ をなす方向に，速さ v_0m/秒 $(v_0 > 0)$ で投げたとき，投げてから t 秒後のPの位置を $(x,\ y)$ とする．空気抵抗を無視すると，x と y は g を正定数として $x = (v_0 \cos\alpha)t$，$y = (v_0 \sin\alpha)t - \dfrac{1}{2}gt^2$ と表される．



(1) Pが正の時刻で x 軸に到達する位置を $(l,\ 0)$ とするとき，l を α，v_0，g で表せ．

(2) 正の時刻で x 軸に到達するまでにPが描く曲線と x 軸とで囲まれる図形の面積 S を α，v_0，g で表せ．

(3) v_0 を固定し，α を動かすとき，S の最大値を v_0，g で表せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $10^{a-b} = \dfrac{10^a}{10^b}$ を用いて，$\log_{10}\dfrac{u}{v} = \log_{10} u - \log_{10} v$ を示せ．ただし，u，v は正の実数とする．

(2) 不等式 $\log_{10} 5x^2 - \log_{10}(x+1)^2 \geqq 1$ をみたす x の値の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ ($a > 0,\ b,\ c$ は実数) について，以下の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる3個の実解をもつための条件を，a，b，c を用いて表せ．

(2) $f(x)$ が $x = -1$ で極大値を，$x = 2$ で極小値をとるとき，極大値および極小値を a を用いて表せ．

(3) $f(x)$ が (2) の条件をみたすとき，$f(x) = 0$ の3つの実解を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 6個の数字1，2，3，4，5，6から重複を許して4個を取り出し，それらを並べて4桁の整数をつくる．千の位，百の位，十の位，一の位の数字を，それぞれ，a，b，c，dとおく．次のような整数は，それぞれ何通りできるか．

(1) $a < d$

(2) $a < b \leqq c < d$

$\boxed{\mathbf{8}}$ $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$のとき，関数$y = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta$について，次の問いに答えよ．

(1) yの最大値，最小値と，そのときのθの値を求めよ．

(2) この関数のグラフをかけ．

$\boxed{\mathbf{9}}$ 正の数p，qが$q < p^2$を満たしているとする．2次関数$y = x^2$のグラフをFとし，Fをx軸方向にp，y軸方向にqだけ平行移動したものをGとする．F，Gとy軸で囲まれた図形のうち，FとGの交点を通り，x軸に平行な直線の上側，下側にある部分の面積をそれぞれS_1，S_2とする．$S_1 < S_2$であるとき，点$(p,\ q)$の存在範囲を図示せよ．

$\boxed{\mathbf{10}}$ 0でない複素数zについて，次の問いに答えよ．

(1) zの絶対値をr，偏角をθとするとき，$z + \dfrac{1}{z}$の実部と虚部を，rとθを用いて表せ．

(2) nを正の整数とする．$z + \dfrac{1}{z}$が実数または純虚数ならば，$z^n + \dfrac{1}{z^n}$も実数または純虚数であることを証明せよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1)

$$\begin{aligned} y &= 4x^2 + 8mx + 4m \\ &= 4(x+m)^2 - 4m^2 + 4m \end{aligned}$$

よって，最小値 $\boldsymbol{l = -4m^2 + 4m}$

(2) $l > 0$ より　$-4m^2 + 4m > 0$　ゆえに　$m(m-1) < 0$

よって　　$\boldsymbol{0 < m < 1}$

(3) (1) の結果から　$l = -4(m^2 - m)$

$$= -4\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

よって，$\boldsymbol{m = \dfrac{1}{2}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{l = 1}$

(4) (3) の結果から，$n = f(m)$ の最大値は $a+1$
よって，$y = f(m)$ のグラフが m 軸に接するとき

$a + 1 = 0$　すなわち　$\boldsymbol{a = -1}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$, $\vec{d}=s\vec{a}+t\vec{b}$ を $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$ に代入すると

$$(1+p+s)\vec{a}+(1+q+t)\vec{b}=\vec{0}$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ が $0^\circ<\theta<180^\circ$ であるから，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立である．

よって　　$\boldsymbol{1+p+s=0,\ 1+q+t=0}$

(2) $\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$ より　　$|\vec{c}|^2=|p\vec{a}+q\vec{b}|=p^2|\vec{a}|^2+2pq\vec{a}\cdot\vec{b}+q^2|\vec{b}|^2$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\cos\theta$ であるから

$$\boldsymbol{p^2+2pq\cos\theta+q^2=1} \quad \cdots ①$$

(3) $\vec{d}=s\vec{a}+t\vec{b}$ より，(2) と同様にして

$$s^2+2st\cos\theta+t^2=1$$

(1) の結果から，$s=-(p+1)$, $t=-(q+1)$　これを上式に代入すると

$$\boldsymbol{(p+1)^2+2(p+1)(q+1)\cos\theta+(q+1)^2=1} \quad \cdots ②$$

(4) ② から ① の辺々を引くと

$$2(p+q+1)(1+\cos\theta)=0$$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より，$1+\cos\theta\neq 0$ であるから

$$p+q+1=0 \quad \text{ゆえに} \quad q=-p-1 \quad \cdots ③$$

③ を ① に代入すると　$p^2+2p(-p-1)\cos\theta+(-p-1)^2=1$

したがって　　　　$2p(p+1)(1-\cos\theta)=0$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より，$1-\cos\theta\neq 0$ であるから

$$2p(p+1)=0 \quad \text{すなわち} \quad p=-1,\ 0$$

このとき，③ および (1) の結果から

$$(p,\ q,\ s,\ t)=(-1,\ 0,\ 0,-1),\ (0,-1,-1,\ 0)$$

(i) $(p,\ q,\ s,\ t)=(-1,\ 0,\ 0,-1)$ のとき　$\vec{c}=-\vec{a}$, $\vec{d}=-\vec{b}$

(ii) $(p,\ q,\ s,\ t)=(0,-1,-1,\ 0)$ のとき　$c=-\vec{b}$, $\vec{d}=-\vec{a}$

(i)，(ii) より　$\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}=\vec{0}$　または　$\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $q=1-p$ とおく.

a_1 は1回の試行で事象 A が1回起こる確率であるから　$\boldsymbol{a_1=p}$

a_2 は2回の試行で事象 A が1回起こる確率であるから

$$a_2={}_2\mathrm{C}_1pq=\boldsymbol{2p(1-p)}$$

a_3 は3回の試行で事象 A が1回または3回起こる確率であるから

$$a_3={}_3\mathrm{C}_1pq^2+{}_3\mathrm{C}_3p^3=3p(1-p)^2+p^3=\boldsymbol{p(4p^2-6p+3)}$$

(2) $n \geqq 2$ のとき，n 回の試行で奇数回 A が起こるのは，次の事象である.

(i) $n-1$ 回までに奇数回 A が起こり，n 回目に A が起こらない.

(ii) $n-1$ 回までに偶数回 A が起こり，n 回目に A が起こる.

(i) の確率は　$a_{n-1}\cdot q$　　(ii) の確率は　$(1-a_{n-1})\cdot p$

(i)，(ii) の事象は互いに排反であるから

$$\begin{aligned}a_n&=a_{n-1}\cdot q+(1-a_n)p=(1-p)a_{n-1}+p(1-a_{n-1})\\&=\boldsymbol{(1-2p)a_{n-1}+p}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$a_n-\dfrac{1}{2}=(1-2p)\left(a_{n-1}-\dfrac{1}{2}\right)$

数列 $\left\{a_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は初項が $p-\dfrac{1}{2}$，公比が $1-2p$ の等比数列であるから

$$a_n-\frac{1}{2}=\left(p-\frac{1}{2}\right)(1-2p)^{n-1}=-\frac{1}{2}(1-2p)^n$$

よって　　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{2}\{1-(1-2p)^n\}}$

(4) $0<p<1$ より　$-1<1-2p<1$　したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1-2p)^n=0$

よって　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}\{1-(1-2p)^n\}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(5) $2n$ 回の試行で偶数回 A が起こる確率は

$$\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}p^{2k}q^{2n-k}=1-a_{2n}$$

$p=\dfrac{1}{2}$ のとき $q=\dfrac{1}{2}$，$a_{2n}=\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=1-\frac{1}{2}\quad よって\quad \boldsymbol{\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}=2^{2n-1}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $x = (v_0 \cos\alpha)t$，$y = (v_0 \sin\alpha)t - \dfrac{1}{2}gt^2$ から t を消去すると

$$\begin{aligned} y &= (\tan\alpha)x - \frac{gx^2}{2{v_0}^2 \cos^2\alpha} \\ &= (\tan\alpha)x\left(1 - \frac{gx}{2{v_0}^2 \sin\alpha\cos\alpha}\right) \\ &= (\tan\alpha)x\left(1 - \frac{gx}{{v_0}^2 \sin 2\alpha}\right) \end{aligned}$$

$x = l$ のとき $y = 0$ であるから

$$1 - \frac{gl}{{v_0}^2 \sin 2\alpha} = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{l = \frac{{v_0}^2 \sin 2\alpha}{g}}$$

(2) (1) の結果から

$$y = (\tan\alpha)x\left(1 - \frac{x}{l}\right) = -\frac{(\tan\alpha)}{l}x(x - l)$$

よって $\qquad S = \dfrac{\tan\alpha}{6l}(l - 0)^3 = \dfrac{\tan\alpha}{6}l^2$

これに (1) の結果を代入すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{\tan\alpha}{6}\left(\frac{{v_0}^2 \sin 2\alpha}{g}\right)^2 = \frac{\tan\alpha}{6} \times \frac{{v_0}^4 \cdot 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{g^2} \\ &= \boldsymbol{\frac{2{v_0}^4}{3g^2}\sin^3\alpha\cos\alpha} \end{aligned}$$

(3) $f(\alpha) = \sin^3\alpha\cos\alpha \ (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^4\alpha \\ &= \sin^2\alpha(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \sin^2\alpha(4\cos^2\alpha - 1) \end{aligned}$$

したがって，$f(\alpha)$ の増減表は次のようになる．

α	(0°)	$\cdots$	60°	$\cdots$	(90°)
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$f(\alpha)$		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	$\searrow$	

よって，S の最大値は $\qquad \dfrac{2{v_0}^4}{3g^2} \times \dfrac{3\sqrt{3}}{16} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}{v_0}^4}{8g^2}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $u=10^a$, $v=10^b$ とおくと　$a=\log_{10}u$, $b=\log_{10}v$

$$10^{a-b}=\frac{10^a}{10^b}=\frac{u}{v}\quad\text{ゆえに}\quad\log_{10}\frac{u}{v}=a-b$$

よって　$$\log_{10}\frac{u}{v}=\log_{10}u-\log_{10}v$$

(2) $$\log_{10}5x^2-\log_{10}(x+1)^2\geqq 1\quad\cdots(*)$$

真数は正であるから

$$5x^2>0,\quad(x+1)^2>0\quad\text{すなわち}\quad x\neq 0,-1$$

$(*)$ から　$$\log_{10}\frac{5x^2}{(x+1)^2}\geqq\log_{10}10$$

底 10 は 1 より大きいから　$$\frac{5x^2}{(x+1)^2}\geqq 10$$

したがって　$x^2\geqq 2(x+1)^2$　ゆえに　$x^2+4x+2\leqq 0$

$x\neq 0,-1$ に注意してこれを解くと

$$\boldsymbol{-2-\sqrt{2}\leqq x<-1,\ -1<x\leqq -2+\sqrt{2}}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx = x(ax^2 + bx + c)$$

$f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつとき，2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が 0 以外の異なる 2 つの実数解をもつから

$$\boldsymbol{c \neq 0,\ b^2 - 4ac > 0}$$

(2) $f(x)$ を微分すると　　$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

方程式 $f'(x) = 0$ の解が $-1,\ 2$ であるから，解と係数の関係により

$$-1 + 2 = -\frac{2b}{3a},\quad -1\cdot 2 = \frac{c}{3a}\quad \text{ゆえに}\quad b = -\frac{3}{2}a,\ \ c = -6a$$

したがって　　$f(x) = ax^3 - \dfrac{3}{2}ax^2 - 6ax$

よって　　極大値 $f(-1) = \boldsymbol{\dfrac{7}{2}a}$　極小値 $f(2) = \boldsymbol{-10a}$

(3) (2) の結果から　$f(x) = \dfrac{1}{2}ax(2x^2 - 3x - 12)$

よって，$f(x) = 0$ の解は　　$\boldsymbol{x = 0,\ \dfrac{3 \pm \sqrt{105}}{4}}$

$\boxed{7}$ (1) a と d の決め方は　${}_6\mathrm{C}_2$ (通り),　　b と c の決め方は　6^2 (通り)

よって　　${}_6\mathrm{C}_2 \times 6^2 = 15 \times 36 = \mathbf{540}$ (通り)

(2) $a < b < c < d$ のとき　${}_6\mathrm{C}_4$ (通り),　　$a < b = c < d$ のとき　${}_6\mathrm{C}_3$ (通り)

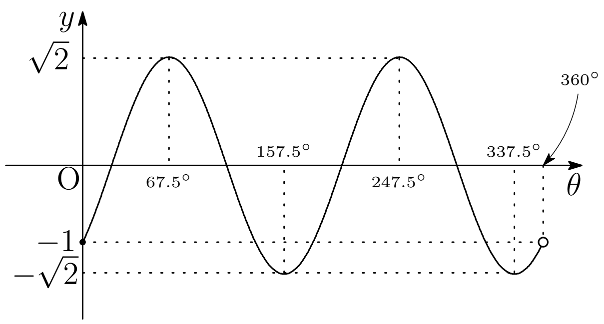
よって　　${}_6\mathrm{C}_4 + {}_6\mathrm{C}_3 = 15 + 20 = \mathbf{35}$ (通り)

$\boxed{8}$ (1)

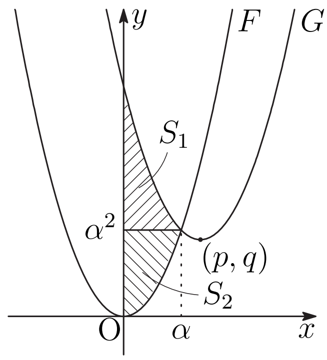
$$\begin{aligned} y &= \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta \\ &= \sin 2\theta - \cos 2\theta = \sqrt{2}\sin(2\theta - 45^\circ) \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\theta = 67.5^\circ,\ 247.5^\circ}$**のとき**　**最大値**$\boldsymbol{\sqrt{2}}$
$\boldsymbol{\theta = 157.5^\circ,\ 337.5^\circ}$**のとき**　**最小値**$\boldsymbol{-\sqrt{2}}$

(2) (1) の結果から



$\boxed{\mathbf{9}}$ $y=x^2$ と $y=(x-p)^2+q$ の共有点の x 座標は



$$x^2=x^2-2px+p^2+q \quad \text{すなわち} \quad x=\frac{p^2+q}{2p}$$

$\alpha=\dfrac{p^2+q}{2p}$ とおくと　$G: y=x^2-2px+2p\alpha$

したがって

$$\begin{aligned} S_1+S_2 &= \int_0^\alpha \{(x^2-2px+2p\alpha)-x^2\}\,dx \\ &= \int_0^\alpha (-2px+2p\alpha)\,dx \\ &= \Big[-px^2+2p\alpha x\Big]_0^\alpha = p\alpha^2 \end{aligned}$$

$$S_2=\int_0^\alpha (\alpha^2-x^2)\,dx=\left[\alpha^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^\alpha=\frac{2}{3}\alpha^3$$

$S_1<S_2$ より，$S_1+S_2<2S_2$ であるから

$$p\alpha^2<2\cdot\frac{2}{3}\alpha^3 \quad \text{ゆえに} \quad p<\frac{4}{3}\alpha=\frac{2(p^2+q)}{3p}$$

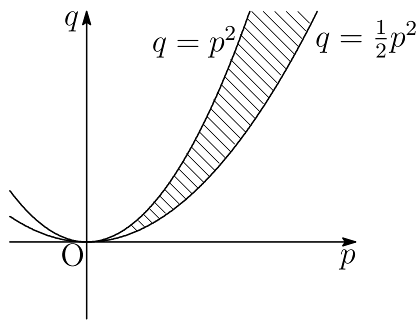
$p>0$ であるから

$$3p^2<2(p^2+q) \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{2}p^2<q$$

よって，点 $(p,\ q)$ の存在する範囲は

$$p>0, \quad \frac{1}{2}p^2<q<p^2$$

をみたす右の図の斜線部分の領域.
ただし，境界を含まない.



$\boxed{\mathbf{10}}$ (1) $r=|z|\neq 0$，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと

$$\frac{1}{z}=z^{-1}=\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^{-1}=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

ゆえに　$$z+\frac{1}{z}=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

よって，$z+\dfrac{1}{z}$ の実部は $\boldsymbol{\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta}$，虚部は $\boldsymbol{\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta}$

(2) n を自然数とする．

$$z^2+\frac{1}{z^2}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2,$$
$$z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right)-\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$$

上の 2 式から，$z+\dfrac{1}{z}$ が実数ならば，$z^n+\dfrac{1}{z^n}$ は実数である．

また，$z+\dfrac{1}{z}$ が純虚数ならば，$z^n+\dfrac{1}{z^n}$ は，n が奇数のとき純虚数，n が偶数のとき実数である．