

令和 7 年度 琉球大学 2 次試験後期日程 (数学問題)
理学部 (数理科学科) 令和 7 年 3 月 12 日

問題 1 2 3 4 数 I・II・III・A・B・C (120 分)

1 関数 $f(x)$ は, $\int_0^x f(t) dt = \frac{x^2}{2} - \cos x + \sin x + 1$ を満たすとする. ただし $0 < x < 2\pi$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ の極値を求めよ.
- (2) 曲線 $y = f(x)$ の変曲点を求めよ.

2 次の問いに答えよ.

- (1) $\sin 3\theta$ を $\sin \theta$ を用いて表せ.
- (2) 等式 $\sin \frac{3\pi}{5} = \sin \frac{2\pi}{5}$ を利用して, $\cos \frac{\pi}{5}$ を求めよ.
- (3) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において, 曲線 $y = \sin 2x$, $y = \sin 3x$, 直線 $x = \frac{\pi}{2}$ で囲まれる部分の面積を求めよ.

3 数列 $\{a_n\}$ を, 条件 $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定める. 次の問いに答えよ.

- (1) $a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ を 5 で割った余りを求めよ.
- (2) すべての $n \geq 1$ に対して, a_n を 5 で割った余りと a_{n+k} を 5 で割った余りが等しくなるような最小の自然数 k を求めよ.
- (3) a_{2025} を 5 で割った余りを求めよ.

4 数直線上の 4 点 1, 2, 3, 4 を動く点 P が 1 の位置にある. サイコロを投げて, 1, 2, 3, 4 の目が出たらその目が表す数字の位置に移動し, 5, 6 の目が出たら移動はせず, 現在の位置にとどまる. 例えば, 1 回目に 3 の目, 2 回目に 5 の目が出たとき, その 2 回目の試行の後, 点 P は 3 の位置にある. この試行を繰り返し, n 回目の試行の後に, 点 P が 1 の位置にある確率を p_n とする. 次の問いに答えよ.

- (1) p_1 および p_2 を求めよ.
- (2) p_{n+1} を p_n の式で表せ.
- (3) p_n の一般項を求めよ. また, $\sum_{k=1}^n p_k$ を求めよ.

解答例

1 (1) $\int_0^x f(t) dt = \frac{x^2}{2} - \cos x + \sin x + 1$ より

$$f(x) = x + \sin x + \cos x,$$

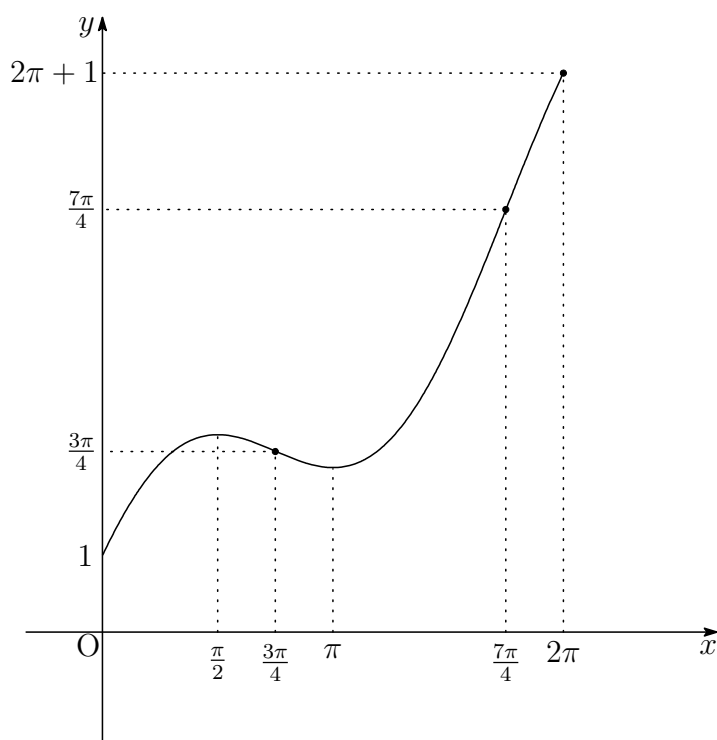
$$f'(x) = 1 + \cos x - \sin x = 1 - \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right),$$

$$f''(x) = -\sin x - \cos x = -\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

したがって、 $f(x)$ の増減および凹凸は、次のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3\pi}{4}$	...	π	...	$\frac{7\pi}{4}$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	-	-	0	+	+	+	
$f''(x)$		-	-	-	0	+	+	+	0	-	
$f(x)$	1	$\curvearrowright$	極大	$\curvearrowleft$	変曲点	$\curvearrowleft$	極小	$\curvearrowright$	変曲点	$\curvearrowright$	$2\pi + 1$

よって 極大値 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 1$, 極小値 $f(\pi) = \pi - 1$



(2) (1) の増減表から $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}$, $f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{4}$

よって、変曲点は $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{7\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$



$$\begin{aligned}
 \text{[2]} \quad (1) \quad \sin 3\theta &= \sin(2\theta + \theta) = \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta \\
 &= 2 \sin \theta \cos \theta \cdot \cos \theta + (1 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta \\
 &= 2 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) + (1 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta \\
 &= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta = \sin \theta (3 - 4 \sin^2 \theta)
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \theta = \frac{\pi}{5} \text{ とおくと, } 5\theta = \pi \text{ より } 3\theta = \pi - 2\theta$$

$$\sin 3\theta = \sin(\pi - 2\theta) = \sin 2\theta \text{ であるから, (1) の結果より}$$

$$\sin \theta (3 - 4 \sin^2 \theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\sin \theta \neq 0 \text{ であるから } 3 - 4 \sin^2 \theta = 2 \cos \theta$$

$$3 - 4(1 - \cos^2 \theta) = 2 \cos \theta \quad \text{ゆえに} \quad 4 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - 1 = 0$$

$$\cos \theta > 0 \text{ に注意して } \cos \theta = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{よって} \quad \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$(3) \quad (2) \text{ の結果から, } \sin 3x = \sin x (3 - 4 \sin^2 x) = \sin x (4 \cos^2 x - 1) \text{ より}$$

$$\begin{aligned}
 \sin 3x - \sin 2x &= \sin x (4 \cos^2 x - 1) - 2 \sin x \cos x \\
 &= \sin x (4 \cos^2 x - 2 \cos x - 1)
 \end{aligned}$$

$$f(x) = \sin 3x - \sin 2x \text{ とすると } \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{5} \text{ のとき } f(x) \geq 0, \quad \frac{\pi}{5} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき } f(x) \leq 0$$

$$f(x) \text{ の原始関数の 1 つを } F(x) = -\frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{2} \cos 2x \text{ とすると}$$

$$\begin{aligned}
 F(0) &= \frac{1}{6}, \quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \\
 F(\theta) &= -\frac{1}{3} \cos 3\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta = \frac{1}{3} \cos 2\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \\
 &= \frac{5}{6} \cos 2\theta = \frac{5}{6} (2 \cos^2 \theta - 1) = \frac{5}{6} \left(\cos \theta - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{24} (\sqrt{5} - 1)
 \end{aligned}$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^\theta f(x) dx - \int_\theta^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 2F(\theta) - F(0) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
 &= 2 \cdot \frac{5}{24} (\sqrt{5} - 1) - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{5} - 1}{12}
 \end{aligned}$$



3 (1) 与えられた漸化式より

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	2	1	3	4	7	11	18	29

したがって, $a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ を 5 で割った余りはそれぞれ

3, 4, 2, 1, 3, 4

(2) 法 5 について

$$a_5 \equiv a_1 \equiv 2, \quad a_6 \equiv a_2 \equiv 1, \quad a_7 \equiv a_3 \equiv 3, \quad a_8 \equiv a_4 \equiv 4 \pmod{5}$$

したがって, $a_{n+k} \equiv a_n \pmod{5}$ を満たす最小の自然数 k は **4**

(3) (2) で求めた法 5 による $\{a_n\}$ の巡回性により

$$a_{2025} \equiv a_1 \equiv 2 \pmod{5}$$

よって, 求める余りは **2**



- 4** (1) p_1 は 1 回目の試行で 1, 5, 6 のいずれかの目が出る確率であるから

$$p_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

条件から, 次の確率漸化式が成立する.

$$p_{n+1} = \frac{3}{6}p_n + \frac{1}{6}(1 - p_n) = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6} \quad (*)$$

したがって $p_2 = \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

(2) (*) より $p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}$

(3) (2) の結果から $p_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \left(p_n - \frac{1}{4} \right)$

$\left\{ p_n - \frac{1}{4} \right\}$ は, 初項 $p_1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, 公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad p_n = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\}$$

したがって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n p_k &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left\{ 1 + \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1} \right\} = \frac{1}{4} \left\{ n + \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n}{1 - \frac{1}{3}} \right\} \\ &= \frac{n}{4} + \frac{3}{8} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

■