

令和7年度 琉球大学2次試験前期日程 (数学問題)

理・工・医・農・教育学部 令和7年2月25日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部 [1] [2] [3] [4] 数I・II・III・A・B・C (120分)
- 農・教育 (学校教育 [教育実践学・技術・特別支援], 生涯教育 [自然環境科学]) 学部 [5] [6] 数I・II・A・B・C (60分)

[1] n を自然数, $f_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!}$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) $f_2(x)$ の導関数を求めよ.
- (2) $x \geq 0$ のとき, 不等式 $e^x \geq f_1(x)$ を示せ.
- (3) $x \geq 0$ のとき, すべての自然数 $n \geq 1$ に対して不等式 $e^x \geq f_n(x)$ を示せ.
- (4) $0 \leq x \leq 1$ のとき, すべての自然数 $n \geq 1$ に対して不等式 $e^x \leq f_n(x) + \frac{x^n}{n!}$ を示せ.

[2] $a > 0$ として, $g(a) = \int_a^{a+1} (x - \log x) dx$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 不定積分 $\int \log x dx$ を求めよ.
- (2) $g(a)$ を求めよ.
- (3) $g(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ.

[3] 四面体 OABC の辺の長さを $OA = 3$, $OB = \sqrt{5}$, $OC = \sqrt{6}$, $AB = 2\sqrt{2}$ とする. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ として, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 3$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 3$ とする. 次の問いに答えよ.

- (1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ.
- (2) 点 O から平面 ABC に垂線を下ろしその交点を H とする. このとき, $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ.
- (3) 点 A から平面 OBC に垂線を下ろしその交点を K とする. このとき, 直線 OH と直線 AK は交わることを示せ. また, その交点を M とするとき, $\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ.

4 赤玉 3 個と白玉 3 個が入っている袋がある．まず 3 枚のコインを投げ，表が k 枚出たとき，この袋に赤玉を k^2 個追加し，次にその袋から玉を 2 個同時に取り出すという試行を行う．例えば，コイン投げで表が 2 枚，裏が 1 枚出たときは，赤玉 4 個を追加して，赤玉 7 個と白玉 3 個が入っている袋から玉を 2 個同時に取り出す．コイン投げで 3 枚とも裏が出たときは，赤玉の追加はなく，赤玉 3 個と白玉 3 個が入っている袋から玉を 2 個同時に取り出す．次の問いに答えよ．

- (1) コイン投げで 3 枚とも表でありかつ袋から取り出した玉が 2 個とも赤玉である確率を求めよ．
- (2) 袋から取り出した玉が 2 個とも赤玉である確率を求めよ．
- (3) 袋から取り出した玉が 2 個とも赤玉であったとき，コイン投げで 3 枚とも表であったという条件付き確率を求めよ．

5 次の問いに答えよ.

- (1) $\frac{1}{37}$ を小数で表したとき, 小数第 100 位の数字を求めよ. また $\frac{1}{37} + \frac{32}{33}$ を小数で表したとき, 小数第 100 位の数字を求めよ.
- (2) 21 の階乗 $21!$ を素因数分解せよ.
- (3) 多項式 $P(x)$ を $x^2 - 1$ で割ったときの余りが $2x$, $x^2 - x - 6$ で割ったときの余りが $3x + 2$ である. このとき, $P(x)$ を $x^2 - 4x + 3$ で割ったときの余りを求めよ.

6 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ を考える. 次の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ が $x = 1$ と $x = 2$ で極値をとるとき, a と b の値を求めよ.
- (2) a と b を (1) で求めた値とする. さらに曲線 $y = f(x)$ が直線 $y = 6x - 2$ に接するとき, c の値を求めよ.

解答例

1 (1) $f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ より $f_2'(x) = 1 + x$

(2) $x \geq 0$ のとき, $e^x - 1 \geq 0$ であるから

$$\int_0^x (e^t - 1) dt = \left[e^t - t \right]_0^x = e^x - 1 - x = e^x - f_1(x) \geq 0$$

したがって, $x \geq 0$ のとき $e^x \geq f_1(x)$

(3) $g_n(x) = e^x - f_n(x)$ とおくと (n は自然数)

$$x \geq 0 \text{ において } g_n(x) \geq 0 \quad (*)$$

[1] $n = 1$ のとき, (2) の結果より, (*) が成立する.

[2] $n = k$ のとき, (*) が成立すると仮定すると

$$g_{k+1}'(x) = e^x - f_{k+1}'(x) = e^x - f_k'(x) = g_k(x) \geq 0$$

$$g_{k+1}(0) = 0 \text{ より, } x \geq 0 \text{ において } g_{k+1}(x) \geq 0$$

したがって, $n = k + 1$ のときも, (*) が成立する.

[1], [2] より, すべての自然数 n について

$$x \geq 0 \text{ において } g_n(x) \geq 0 \text{ すなわち } e^x \geq f_n(x)$$

(4) $h_n(x) = f_n(x) + \frac{x^n}{n!} - e^x$ とおくと (n は自然数)

$$0 \leq x \leq 1 \text{ において } h_n(x) \geq 0 \quad (**)$$

[1] $n = 1$ のとき, $h_1(x) = 1 + 2x - e^x$ より $h_1'(x) = 2 - e^x$

x	0	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$	1
$h_1'(x)$		+	0	-	
$h_1(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$3 - e$

したがって, $n = 1$ のとき, (**) は成立する.

[2] $n = k$ のとき, (**) が成立すると仮定すると

$$h_{k+1}'(x) = \left\{ f_{k+1}(x) + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} - e^x \right\}' = f_k(x) + \frac{x^k}{k!} - e^x = h_k(x) \geq 0$$

$$h_{k+1}(0) = 0 \text{ より, } 0 \leq x \leq 1 \text{ において } h_{k+1}(x) \geq 0$$

したがって, $n = k + 1$ のときも, (**) が成立する.

[1], [2] より, すべての自然数 n について

$$0 \leq x \leq 1 \text{ において } h_n(x) \geq 0 \text{ すなわち } e^x \leq f_n(x) + \frac{x^n}{n!} \quad \blacksquare$$

2 (1)

$$\begin{aligned}
 \int \log x \, dx &= \int (x)' \log x \, dx \\
 &= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
 &= x \log x - x + C \quad (C \text{ は積分定数})
 \end{aligned}$$

(2) (1) の結果を利用すると

$$\begin{aligned}
 g(a) &= \int_a^{a+1} (x - \log x) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \log x + x \right]_a^{a+1} \\
 &= a + \frac{3}{2} - (a+1) \log(a+1) + a \log a
 \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$g'(a) = 1 - \log(a+1) + \log a = 1 - \log \frac{a+1}{a}$$

$$g'(a) = 0 \text{ とすると } a = \frac{1}{e-1}$$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e-1}$	$\cdots$
$g'(a)$		$-$	0	$+$
$g(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって、 $a = \frac{1}{e-1}$ のとき、最小値

$$\begin{aligned}
 g\left(\frac{1}{e-1}\right) &= \frac{1}{e-1} + \frac{3}{2} - \frac{e}{e-1} \log \frac{e}{e-1} + \frac{1}{e-1} \log \frac{1}{e-1} \\
 &= \frac{1}{e-1} + \frac{3}{2} - \frac{e}{e-1} + \left(\frac{e}{e-1} - \frac{1}{e-1}\right) \log(e-1) \\
 &= \frac{1}{2} + \log(e-1)
 \end{aligned}$$

■

3 (1) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = \sqrt{5}, |\vec{b} - \vec{a}| = 2\sqrt{2}$ より $|\vec{b} - \vec{a}|^2 = 8$

$$|\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 8 \quad \text{ゆえに} \quad 5 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 9 = 8$$

これを解いて $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$

(2) 実数 x, y を用いて, $\vec{OH} = \vec{OA} + x\vec{AB} + y\vec{AC}$ とおく.

$$\vec{OA} \cdot \vec{AB} = \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{a}|^2 = 3 - 3^2 = -6,$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{AC} = \vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{c} - |\vec{a}|^2 = 3 - 3^2 = -6,$$

$$|\vec{AB}|^2 = 8,$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{a}|^2 \\ &= 3 - 3 - 3 + 3^2 = 6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{AC}|^2 &= |\vec{c} - \vec{a}|^2 = |\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{a}|^2 \\ &= 6 - 3 \cdot 2 + 3^2 = 9 \end{aligned}$$

$\vec{OH} \perp \vec{AB}, \vec{OH} \perp \vec{AC}$ より

$$\vec{OH} \cdot \vec{AB} = \vec{OA} \cdot \vec{AB} + x|\vec{AB}|^2 + y\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0,$$

$$\vec{OH} \cdot \vec{AC} = \vec{OA} \cdot \vec{AC} + x\vec{AB} \cdot \vec{AC} + y|\vec{AC}|^2 = 0$$

ゆえに $-6 + 8x + 6y = 0, \quad -6 + 6x + 9y = 0$

これを解いて $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \vec{OH} &= \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{a}) \\ &= \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \end{aligned}$$

(3) 実数 m, n を用いて, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AO} + m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OC}$ とおくと

$$\overrightarrow{AK} = -\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}$$

$\overrightarrow{AK} \perp \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AK} \perp \overrightarrow{OC}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{OB} &= (-\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}) \cdot \vec{b} = -\vec{a} \cdot \vec{b} + m|\vec{b}|^2 + n\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= -3 + 5m + 3n = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{OC} &= (-\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}) \cdot \vec{c} = -\vec{a} \cdot \vec{c} + m\vec{b} \cdot \vec{c} + n|\vec{c}|^2 \\ &= -3 + 3m + 6n = 0\end{aligned}$$

これを解いて $m = \frac{3}{7}$, $n = \frac{2}{7}$ ゆえに $\overrightarrow{AK} = -\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b} + \frac{2}{7}\vec{c}$

2 直線 OH, AK の方程式を媒介変数 s, t を用いて表すと

$$\begin{aligned}s\overrightarrow{OH} &= s \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \right) \\ &= \frac{s}{6}\vec{a} + \frac{s}{2}\vec{b} + \frac{s}{3}\vec{c}, \\ \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AK} &= \vec{a} + t \left(-\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b} + \frac{2}{7}\vec{c} \right) \\ &= (1-t)\vec{a} + \frac{3t}{7}\vec{b} + \frac{2t}{7}\vec{c}\end{aligned}$$

2 直線 OH, AK の方程式について

$$\frac{s}{6} = 1-t, \quad \frac{s}{2} = \frac{3t}{7}, \quad \frac{s}{3} = \frac{2t}{7}$$

を解くと $s = \frac{3}{4}$, $t = \frac{7}{8}$

よって, 2 直線 OH, AK の交点 M は

$$\overrightarrow{OM} = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \right) = \frac{1}{8}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$$



- 4 コインを3枚投げて表が k 枚出る事象を A_k とし($k = 0, 1, 2, 3$), 袋から取り出した玉が2個とも赤玉である事象を B とすると

$$P(A_k \cap B) = {}_3C_k \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{{}_{3+k^2}C_2}{{}_6+k^2C_2} = \frac{{}_3C_k}{8} \cdot \frac{(3+k^2)(2+k^2)}{(6+k^2)(5+k^2)} \quad (*)$$

(1) (*) より

$$P(A_3 \cap B) = \frac{{}_3C_3}{8} \cdot \frac{12 \cdot 11}{15 \cdot 14} = \frac{11}{140}$$

(2) (*) より

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{k=0}^3 P(A_k \cap B) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{3 \cdot 2}{6 \cdot 5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{7 \cdot 6}{10 \cdot 9} + \frac{11}{140} \\ &= \frac{1}{40} + \frac{3}{28} + \frac{7}{40} + \frac{11}{140} = \frac{27}{70} \end{aligned}$$

(3) (1), (2) の結果から

$$P_B(A_3) = \frac{P(A_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{11}{140} \bigg/ \frac{27}{70} = \frac{11}{54}$$

■

- 5** (1) $\frac{1}{37} = 0.\dot{0}2\dot{7}$, $100 = 33 \times 3 + 1$ より, $\frac{1}{37}$ の小数第 100 位の数は **0**
 次に, $\frac{32}{33} = 0.\dot{9}\dot{6}$ であるから

$$\frac{1}{37} + \frac{32}{33} = 0.027027\cdots + 0.969696\cdots = 0.\dot{9}9672\dot{3}$$

$$100 = 16 \times 6 + 4 \text{ より, } \frac{1}{37} + \frac{32}{33} \text{ の小数第 100 位は } \mathbf{7}$$

- (2) 21 以下の素数は 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 より

$$\left[\frac{21}{2} \right] + \left[\frac{21}{2^2} \right] + \left[\frac{21}{2^3} \right] + \left[\frac{21}{2^4} \right] = 10 + 5 + 2 + 1 = 18,$$

$$\left[\frac{21}{3} \right] + \left[\frac{21}{3^2} \right] = 7 + 2 = 9,$$

$$\left[\frac{21}{5} \right] = 4, \quad \left[\frac{21}{7} \right] = 3, \quad \left[\frac{21}{11} \right] = 1,$$

$$\left[\frac{21}{13} \right] = 1, \quad \left[\frac{21}{17} \right] = 1, \quad \left[\frac{21}{19} \right] = 1$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{21! = 2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}$$

- (3) $P(x)$ を $x^2 - 4x + 3$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $ax + b$ とおくと

$$P(x) = (x - 1)(x - 3)Q(x) + ax + b$$

$$P(x) \text{ を } (x + 1)(x - 1) \text{ で割った余りが } 2x \text{ であるから } P(1) = 2$$

$$P(x) \text{ を } (x + 2)(x - 3) \text{ で割った余りが } 3x + 2 \text{ であるから } P(3) = 11$$

$$\text{したがって } a + b = 2, \quad 3a + b = 11 \quad \text{これを解いて } a = \frac{9}{2}, \quad b = -\frac{5}{2}$$

$$\text{よって, 求める余りは } \mathbf{\frac{9}{2}x - \frac{5}{2}} \quad \blacksquare$$

- 6** (1) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ より $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
 $f'(x) = 0$ の解が $x = 1, 2$ であるから, 解と係数の関係により

$$1 + 2 = -\frac{2a}{3}, \quad 1 \cdot 2 = \frac{b}{3} \quad \text{ゆえに} \quad a = -\frac{9}{2}, \quad b = 6$$

- (2) (1) の結果より, $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + c$ であるから

$$f'(x) = 3x^2 - 9x + 6$$

接点の x 座標は, $f'(x) = 6$ を解くと

$$3x^2 - 9x + 6 = 6 \quad \text{ゆえに} \quad x = 0, 3$$

接点は, 接線の方程式より $(0, -2), (3, 16)$

- $f(0) = -2$ のとき $c = -2$
- $f(3) = 16$ のとき $\frac{9}{2} + c = 16$ ゆえに $c = \frac{23}{2}$

よって $c = -2, \frac{23}{2}$

