令和６年度　琉球大学２次試験後期日程 (数学問題)
理学部 (数理科学科)　令和 6 年 3 月 12 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ $0 < a < 1$ とし，$f(x) = x^a \log x$ $(x > 0)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ の変曲点を求めよ．

(3) 曲線 $y = f(x)$ の変曲点における接線の y 切片を $g(a)$ とする．$g(a)$ の最大値と，そのときの a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a > 0$ とする．曲線 $y = \sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸および直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた図形を D とする．次の問いに答えよ．

(1) D の面積を求めよ．

(2) 曲線 $y = \sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $y = a\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の交点の x 座標を t とする．$\cos t$ および $\sin t$ を a を用いて表せ．

(3) D は曲線 $y = a\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ によって図形 D_1，D_2 に分割されるとする．D_1 と D_2 の面積が等しいとき，a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数列 $\{a_n\}$ を数直線上の点列とし，$a_1 = 1$，$a_2 = 2$，a_n と a_{n+1} を $1:2$ に内分する点を a_{n+2} $(n = 1, 2, \cdots)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくことにより数列 $\{b_n\}$ を定める．b_{n+1} を b_n で表せ．

(2) 一般項 b_n を n の式で表せ．

(3) 一般項 a_n を n の式で表せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 当たり 3 本を含む 9 本のくじがある．9 人が順にこのくじを 1 本ずつ引く．引いたくじは，もとに戻さないものとする．次の問いに答えよ．

(1) 2 番目の人が当たりくじを引く確率を求めよ．

(2) 3 番目の人が，2 本目の当たりを引く確率を求めよ．

(3) 2 本目の当たりくじを引く確率が最も大きいのは何番目にくじを引く人か答え，そのときの確率を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x) = x^a \log x$ を微分すると

$$f'(x) = ax^{a-1}\log x + x^a \cdot \frac{1}{x} = x^{a-1}(a\log x + 1)$$

$f'(x) = 0$ とすると　$a\log x + 1 = 0$

$$\log x = -\frac{1}{a} \quad ゆえに \quad x = e^{-\frac{1}{a}}$$

$f(x)$ の増減は

x	(0)	$\cdots$	$e^{-\frac{1}{a}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって　極小値 $f(e^{-\frac{1}{a}}) = (e^{-\frac{1}{a}})^a \log e^{-\frac{1}{a}} = \boldsymbol{-\frac{1}{ae}}$

(2) $f'(x) = x^{a-1}(a\log x + 1)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f''(x) &= (a-1)x^{a-2}(a\log x + 1) + x^{a-1} \cdot \frac{a}{x} \\ &= x^{a-2}\{a(a-1)\log x + 2a - 1\} \end{aligned}$$

$b = -\dfrac{2a-1}{a(a-1)}$ とおくと，$f''(e^b) = 0$，$x = e^b$ の前後で $f''(x)$ の符号が入れ替わるから，点 $(e^b,\ f(e^b))$ は変曲点である．

$$f(e^b) = (e^b)^a \log e^b = be^{ab} = -\frac{2a-1}{a(a-1)}e^{-\frac{2a-1}{a-1}}$$

よって，変曲点の座標は　$\boldsymbol{\left(e^{-\frac{2a-1}{a(a-1)}}, -\frac{2a-1}{a(a-1)}e^{-\frac{2a-1}{a-1}}\right)}$

(3) 変曲点における接線の傾きは

$$\begin{aligned} f'(e^b) &= (e^b)^{a-1}(a\log e^b+1) = (ab+1)e^{b(a-1)} \\ &= \left(-\frac{2a-1}{a-1}+1\right)e^{-\frac{2a-1}{a}} = -\frac{a}{a-1}e^{-\frac{2a-1}{a}} \end{aligned}$$

変曲点における接線の方程式は

$$y = f'(e^b)(x-e^b)+f(e^b) = f'(e^b)x - e^b f'(b) + f(e^b)$$

この直線の y 切片は

$$\begin{aligned} -e^b f'(b)+f(e^b) &= -e^{-\frac{2a-1}{a(a-1)}}\left(-\frac{a}{a-1}e^{-\frac{2a-1}{a}}\right) - \frac{2a-1}{a(a-1)}e^{-\frac{2a-1}{a-1}} \\ &= \frac{a}{a-1}e^{-\frac{2a-1}{a-1}} - \frac{2a-1}{a(a-1)}e^{-\frac{2a-1}{a-1}} \\ &= \frac{a-1}{a}e^{-\frac{2a-1}{a-1}} = \left(1-\frac{1}{a}\right)e^{-2-\frac{1}{a-1}} \end{aligned}$$

$g(a) = \left(1-\dfrac{1}{a}\right)e^{-2-\frac{1}{a-1}}$ であるから

$$\begin{aligned} g'(a) &= \frac{1}{a^2}e^{-2-\frac{1}{a-1}} + \left(1-\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{1}{(a-1)^2}e^{-2-\frac{1}{a-1}} \\ &= \left\{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a(a-1)}\right\}e^{-2-\frac{1}{a-1}} \\ &= \frac{2a-1}{a^2(a-1)}e^{-2-\frac{1}{a-1}} = \frac{1-2a}{a^2(1-a)}e^{-2-\frac{1}{a-1}} \end{aligned}$$

$0<a<1$ における $g(a)$ の増減は

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，$g(a)$ は $a=\dfrac{1}{2}$ で最大値 $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \mathbf{-1}$ **をとる．**

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) D の面積を S とすると

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\mathbf{1}$$

(2) $y=\sin x$ と $y=a\cos x$ の交点の x 座標が t であるから

$$\sin t=a\cos t$$

$\cos t\neq 0$ に注意して　$\tan t=a$

$$\frac{1}{\cos^2 t}=1+\tan^2 t=1+a^2$$

$\cos t>0$ であるから

$$\cos t=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}},\quad \sin t=\tan x\cos x=\boldsymbol{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}}$$

(3) (1) の結果から，次式が成立する．

$$\int_t^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-a\cos x)\,dx=\frac{1}{2} \qquad (*)$$

$$\begin{aligned}(*)\text{ の左辺}&=\Big[-\cos x-a\sin x\Big]_t^{\frac{\pi}{2}}\\&=\cos t-a+a\sin t\\&=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}-a+\frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}}\\&=\sqrt{1+a^2}-a\end{aligned}$$

したがって　$\sqrt{1+a^2}-a=\dfrac{1}{2}$

$$\sqrt{1+a^2}=a+\frac{1}{2}\quad\text{ゆえに}\quad 1+a^2=a^2+a+\frac{1}{4}$$

よって　$\boldsymbol{a=\frac{3}{4}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 条件から　$a_{n+2}=\dfrac{2a_n+a_{n+1}}{3}$，$b_n=a_{n+1}-a_n$

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{b_{n+1}=-\frac{2}{3}b_n}$$

(2) $b_1=a_2-a_1=2-1=1$

(1) の結果から，$\{b_n\}$ は初項 1，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$b_n=1\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\qquad \text{よって}\quad \boldsymbol{b_n=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$$

(3) $a_1=1$ および (2) の結果から　$a_{n+1}-a_n=\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

$n\geqq 2$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

$$a_n-a_1=\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから

$$a_n=1+\frac{3}{5}\left\{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}=\boldsymbol{\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 2 番目の人と 1 番目の人が当たりを引く確率は等しいから

$$\frac{3}{9}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

(2) 下の図の 2 つの A と 6 つの B から，それぞれ 1 つ選ぶ場合の数は

$$ {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_6\mathrm{C}_1 = 2\times 6 = 12$$

よって，求める確率は　$\dfrac{12}{{}_9\mathrm{C}_3}=\dfrac{12}{84}=\boldsymbol{\dfrac{1}{7}}$

A	A	○	B	B	B	B	B	B

(3) k 番目の人が 2 本目の当たりを引く確率を p_k とする．

(2) と同様に，$k-1$ 個の A と $9-k$ 個の B から，それぞれ 1 つ選ぶ場合の数は

$$(k-1)(9-k)=-k^2+10k-9=-(k-5)^2+16$$

したがって　$p_k=\dfrac{-(k-5)^2+16}{{}_9\mathrm{C}_3}=\dfrac{-(k-5)^2+16}{84}$

よって，p_k は，$\boldsymbol{k=5}$ のとき，最大値 $\dfrac{16}{84}=\boldsymbol{\dfrac{5}{21}}$