令和6年度　琉球大学2次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・農・教育学部　令和6年2月25日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農・教育 (学校教育 [教育実践学・技術・特別支援]，生涯教育 [自然環境科学]) 学部　$\boxed{5}$ $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (60 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ a を正の実数とする．曲線 $y = \log x$ の点 $(a,\ \log a)$ における接線を l_1，点 $(2a,\ \log 2a)$ における接線を l_2 とする．次の問いに答えよ．

(1) 接線 l_1 の方程式を求めよ．

(2) l_1 と l_2 の交点の座標を求めよ．

(3) 曲線 $y = \log x$ と直線 l_1，l_2 で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする．$\dfrac{S(a)}{a}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ a を実数とし，$f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x} + a$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y = f(x)$ の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式を求めよ．

(2) 原点 O から曲線 $y = f(x)$ にちょうど 2 本の接線が引けるような a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ z を複素数で $|z-1| = \sqrt{2}$ を満たすものとし，$w = z + \dfrac{1}{z}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $\left|\dfrac{1}{z} + 1\right|^2 = 2$ であることを示せ．

(2) $|w-2||w+2| = 4$ であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 白玉 1 個が入った袋 A と，白玉 2 個と赤玉 2 個が入った袋 B がある．袋 B から無作為に玉を 1 個取り出し，袋 A に入っている玉と交換する．この試行を繰り返す．n 回試行を繰り返したあとに，袋 A に入っている玉が白である確率を p_n とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) p_1 を求めよ．

(2) p_{n+1} を p_n の式で表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

$\boxed{5}$ 次の問いに答えよ．

(1) 2024の正の約数の総和を求めよ．

(2) 4乗すると1となる複素数をすべて求めよ．

(3) 大きさ1のベクトルが2つあり，そのなす角は75°である．このとき，この2つのベクトルの内積と$\dfrac{1}{4}$はどちらが大きいか答えよ．

$\boxed{6}$ xy平面上で，中心が点$\mathrm{P}(0,\ 2)$で半径が1の円と，放物線$y = x^2 + a$ (aは定数)が，異なる2点で接している．ただし，円と放物線がある点で接するとは，その点における円の接線と放物線の接線が一致することであり，その点を接点という．次の問いに答えよ．

(1) aの値を求めよ．

(2) 2つの接点をA，Bとする．ただし，Aのx座標はBのx座標より小さいとする．線分PA，PBと放物線で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $y=\log x$ を微分すると　$y'=\dfrac{1}{x}$

曲線 $y=\log x$ 上の点 $(a,\ \log a)$ における接線 l_1 の方程式は

$$y=\frac{1}{a}(x-a)+\log a \quad すなわち \quad \boldsymbol{y=\frac{x}{a}-1+\log a}$$

(2) (1) の結果から，$y=\log x$ 上の点 $(2a,\ \log 2a)$ における接線 l_2 の方程式は

$$y=\frac{x}{2a}-1+\log 2a$$

l_1 と l_2 の 2 式から y を消去すると

$$\frac{x}{a}-1+\log a=\frac{x}{2a}-1+\log 2a \quad ゆえに \quad x=2a\log 2$$

これを l_2 の方程式に代入すると　$y=2\log 2+\log a-1$

よって，交点の座標は　$\boldsymbol{(2a\log 2,\ 2\log 2+\log a-1)}$

(3) $x_0=2a\log 2,\ y_0=2\log 2+\log a-1$ とおき，l_1 と l_2 の交点を $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$，曲線 $y=\log x$ 上の点を $\mathrm{Q}(t,\ \log t)$ とおく $(a\leqq t\leqq 2a)$．さらに

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(f(t),\ g(t))$$

とすると　$f(t)=t-x_0,\quad g(t)=\log t-y_0$

$$\begin{aligned} f(t)g'(t)-f'(t)g(t)&=(t-x_0)\frac{1}{t}-(\log t-y_0)\\ &=1+y_0-\frac{x_0}{t}-\log t \end{aligned}$$

ガウス・グリーンの定理により [1]

$$\begin{aligned} S(a)&=\frac{1}{2}\int_a^{2a}\left(1+y_0-\frac{x_0}{t}-\log t\right)dt\\ &=\frac{1}{2}\Big[\,(1+y_0)t-x_0\log t-t(\log t-1)\,\Big]_a^{2a}\\ &=\frac{1}{2}\{(1+y_0)a-x_0\log 2+a(1-2\log 2-\log a)\}\\ &=\frac{1}{2}\{(2\log 2+\log a)a-2a(\log 2)^2+a(1-2\log 2-\log a)\}\\ &=a\left\{\frac{1}{2}-(\log 2)^2\right\} \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{S(a)}{a}=\dfrac{1}{2}-(\log 2)^2}$　■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2022.pdf $\boxed{5}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}+a$ より　$f'(x)=2x+\dfrac{1}{x^2}$

$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y=\left(2t+\frac{1}{t^2}\right)(x-t)+t^2-\frac{1}{t}+a$$

すなわち　$\boldsymbol{y=\left(2t+\dfrac{1}{t^2}\right)x-t^2-\dfrac{2}{t}+a}$

(2) (1) で求めた直線が原点を通るから

$$-t^2-\frac{2}{t}+a=0 \quad \text{ゆえに} \quad a=t^2+\frac{2}{t} \qquad (*)$$

$(*)$ の解が丁度 2 個存在すればよい．$g(t)=t^2+\dfrac{2}{t}$ とおくと

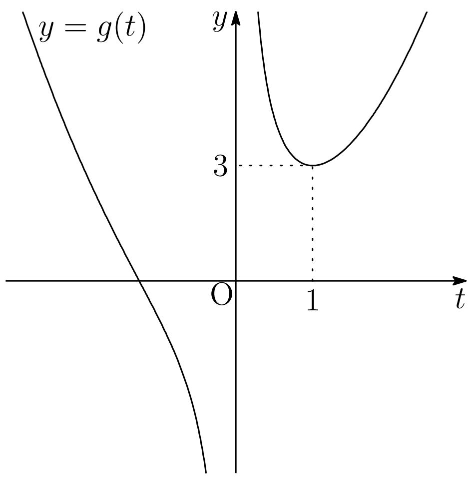
$$g'(t)=2t-\frac{2}{t^2}=\frac{2(t^3-1)}{t^2}$$

$g(t)$ の増減表は

t	$\cdots$	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	$-$		$-$	0	$+$
$g(t)$	$\searrow$		$\searrow$	3	$\nearrow$

$$\lim_{t\to+0}g(t)=\infty,\quad \lim_{t\to-0}g(t)=-\infty,\quad \lim_{t\to\pm\infty}g(t)=\infty$$

よって，条件を満たす a の値は　$\boldsymbol{a=3}$



■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $|z-1|=\sqrt{2}$ より　$|z-1|^2=2$

$$(z-1)(\overline{z}-1)=2 \quad \text{ゆえに} \quad |z|^2=1+z+\overline{z}$$

したがって

$$\left|\frac{1}{z}+1\right|^2=\frac{|1+z|^2}{|z|^2}=\frac{1+z+\overline{z}+|z|^2}{|z|^2}=\frac{|z|^2+|z|^2}{|z|^2}=2$$

(2) $w=z+\dfrac{1}{z}$ より

$$\begin{aligned}
|w-2||w+2| &= \left|z+\frac{1}{z}-2\right|\left|z+\frac{1}{z}+2\right| \\
&= \left|\frac{z^2+1-2z}{z}\right|\left|\frac{z^2+1+2z}{z}\right| \\
&= \left|\frac{(z-1)^2}{z}\right|\left|\frac{(z+1)^2}{z}\right| \\
&= \left|\frac{(z-1)^2(z+1)^2}{z^2}\right| \\
&= |z-1|^2\left|\frac{z+1}{z}\right|^2 \\
&= |z-1|^2\left|\frac{1}{z}+1\right|^2=2\cdot 2=4
\end{aligned}$$

■

4 (1) 袋 B にある白玉 2 個，赤玉 2 個から白玉 1 個を取り出す確率であるから

$$\frac{2}{4} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2) 袋 A に白玉が入っているとき，袋 B(白玉 2 個，赤玉 2 個) から白玉 1 個を取り出す確率が $\frac{1}{2}$ であり，袋 A に赤玉が入っているとき，袋 B(白玉 3 個，赤玉 1 個) から白玉 1 個を取り出す確率が $\frac{3}{4}$ であるから，次の確率漸化式が成立する．

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{3}{4}(1-p_n) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{3}{4}}$$

(3) (2) 結果から

$$p_{n+1} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{4}\left(p_n - \frac{3}{5}\right)$$

$\left\{p_n - \frac{3}{5}\right\}$ は，初項 $p_1 - \frac{3}{5} = -\frac{1}{10}$，公比 $-\frac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$p_n - \frac{3}{5} = -\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad p_n = \frac{3}{5} - \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

よって $\displaystyle \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{3}{5}}$ ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $2024 = 2^3 \times 11 \times 23$ であるから，約数の総和は

$$(1+2+2^2+2^3)(1+11)(1+23) = 15 \times 12 \times 24 = \mathbf{4320}$$

(2) $x^4 = 1$ とすると　$(x+1)(x-1)(x+i)(x-i) = 0$

よって　$\boldsymbol{x = \pm 1,\ \pm i}$

(3) 2 つのベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 75^\circ = 1\cdot 1\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ここで

$$(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 - 1^2 = 7 - 4\sqrt{3} = \frac{(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})}{7+4\sqrt{3}} = \frac{1}{7+4\sqrt{3}} > 0$$

したがって　$\sqrt{6}-\sqrt{2} > 1$　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} > \dfrac{1}{4}$　■

6 (1) 放物線 $y=x^2+a$ 上に点 $\mathrm{Q}(t,\ t^2+a)$ をとり，関数 $f(t)=\mathrm{PQ}^2$ を考える．

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2+(t^2+a-2)^2 = t^4+(2a-3)t^2+(a-2)^2 \\ &= \left(t^2+a-\frac{3}{2}\right)^2-a+\frac{7}{4} \qquad (*) \end{aligned}$$

$f(t)$ の最小値が 1^2 で，$f(t)=1^2$ となる t が丁度2つ存在すればよいから

$$-a+\frac{7}{4}=1 \quad \text{ゆえに} \quad a=\frac{3}{4}$$

これを $(*)$ に代入すると

$$f(t)=\left(t^2-\frac{3}{4}\right)^2+1$$

実際，$f(t)$ は $t=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ で最小値1をとる．よって　$\boldsymbol{a=\dfrac{3}{4}}$

(2) $y=x^2+\dfrac{3}{4}$ から，$\mathrm{A}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

求める面積を S とすると，下の図から

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{PAB}+\int_{-\frac{3}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{\frac{3}{2}-\left(x^2+\frac{3}{4}\right)\right\}dx \\ &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}-\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{6}(\sqrt{3})^3=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}} \end{aligned}$$