令和５年度　琉球大学２次試験後期日程 (数学問題)
理学部 (数理科学科)　令和５年３月12日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 関数 $y = x\sqrt{9-x^2}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) 増減を調べてこの関数のグラフをかけ．

(2) この関数のグラフと x 軸で囲まれてできる図形の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ とし，$f(x) = F(3x) - F(x)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) $x \geqq 0$ の範囲で，$f(x)$ の最大値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 自然数からなる２つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．次の問いに答えよ．

(1) すべての自然数 n に対して，a_n は奇数，b_n は偶数であることを示せ．

(2) すべての自然数 n に対して，

$$1+2+3+\cdots+\frac{a_n-3}{2}+\frac{a_n-1}{2} = 1+3+5+\cdots+(b_n-3)+(b_n-1)$$

が成立することを示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 赤球が１個，白球が２個入った球を１個取り出して，その色を見てから袋に戻すという試行を，白球が２回続けて出るまで行う．n 回目に白球を取り出しまだ試行が終わらない確率を p_n，n 回目に赤球を取り出す確率を q_n とする．次の問いに答えよ．

(1) p_{n+1}，q_{n+1} を p_n，q_n を用いて表せ．

(2) $a_n = p_n - q_n$ とするとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $b_n = (-3)^n p_n$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $n+1$ 回目で試行が終わる確率を求めよ．

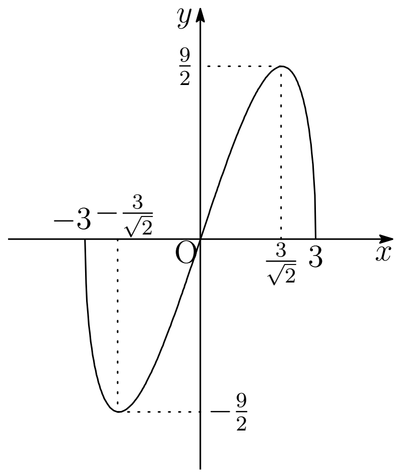
解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y = x\sqrt{9-x^2}$ より，定義域は，$9-x^2 \geqq 0$ を解いて　$-3 \leqq x \leqq 3$

$$y = \sqrt{9-x^2} + x\left(\frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}\right) = \frac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$$

したがって，増減およびグラフの概形は次のようになる．

x	-3	$\cdots$	$-\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	3
y'		$-$	0	$+$	$-$		
y		↘	極小	↗	極大	↘	



(2) グラフは原点に関して対称であるから，求める面積は

$$2\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx = 2\left[-\frac{1}{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \mathbf{18}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ より，$F'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ であるから

$$f'(x)=3F'(3x)-F'(x)=\frac{3}{1+9x^2}-\frac{1}{1+x^2}=\boldsymbol{\frac{2-6x^2}{(1+x^2)(1+9x^2)}}$$

(2) (1) の結果から

$$f'(x)=\frac{-6}{(1+x^2)(1+9x^2)}\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$x \geqq 0$ で増減表をかくと

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$

$x \geqq 0$ における最大値は，上の増減表および $f(x)=F(3x)-F(x)$ により

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=F(\sqrt{3})-F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$t=\tan\theta$ とおくと

$$\frac{1}{1+t^2}=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\cos^2\theta,\quad dt=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

t	$\frac{1}{\sqrt{3}} \to \sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{3}$

したがって

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \quad (n=1,2,3,\cdots)$ より

$$\begin{aligned} a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2} &= (3+2\sqrt{2})(a_n+b_n\sqrt{2}) \\ &= 3a_n+4b_n+(2a_n+3b_n)\sqrt{2} \end{aligned}$$

a_n，b_n は自然数で，$\sqrt{2}$ は無理数であるから，次の漸化式が成立する．

$$a_{n+1} = 3a_n+4b_n, \quad b_{n+1} = 2a_n+3b_n \qquad (*)$$

a_n，b_n は自然数であるから，法 2 について

$$a_{n+1} \equiv a_n, \quad b_{n+1} \equiv b_n \pmod 2$$

$a_1=3$，$b_1=2$ であるから，すべての自然数 n について

$$a_n \equiv 1, \quad b_n \equiv 0 \pmod 2$$

よって，すべての自然数 n について，a_n は奇数，b_n は偶数．

(2) l，m を自然数とすると

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+l &= \frac{1}{2}l(l+1) \\ 1+3+5+\cdots+(2m-1) &= m^2 \end{aligned}$$

これに $l=\dfrac{a_n-1}{2}$，$m=\dfrac{b_n}{2}$ を代入すると

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+\frac{a_n-1}{2} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{a_n-1}{2}\left(\frac{a_n-1}{2}+1\right) = \frac{{a_n}^2-1}{8} \\ 1+3+5+\cdots+(b_n-1) &= \left(\frac{b_n}{2}\right) = \frac{{b_n}^2}{4} \end{aligned}$$

したがって，すべての自然数 n について

$${a_n}^2-2{b_n}^2=1$$

が成立することを示せばよい．$(*)$ より

$${a_{n+1}}^2-2{b_{n+1}}^2 = (3a_n+4b_n)^2-2(2a_n+3b_n)^2 = a_n^2-{b_n}^2$$

したがって　${a_n}^2-2b^2 = {a_1}^2-2{b_1}^2 = 3^2-2\cdot2^2 = 1$

よって，すべての自然数 n に対して，次式が成立する．

$$1+2+3+\cdots+\frac{a_n-3}{2}+\frac{a_n-1}{2} = 1+3+5+\cdots+(b_n-3)+(b_n-1)$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 試合が継続している状態で $n+1$ 回目が白玉であるとき，n 回目は赤玉であるから

$$\boldsymbol{p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n}$$

試合が継続している状態で $n+1$ 回目が赤玉であるとき，n 回目は白玉または赤玉であるから

$$\boldsymbol{q_{n+1} = \frac{1}{3}(p_n + q_n)}$$

(2) $a_n = p_n - q_n$ とすると，(1) の結果から

$$a_{n+1} = p_{n+1} - q_{n+1} = \frac{2}{3}q_n - \frac{1}{3}(p_n + q_n) = -\frac{1}{3}(p_n - q_n) = -\frac{1}{3}a_n$$

$a_1 = p_1 - q_1 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$ より，$\{a_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$a_n = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \boldsymbol{-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

(3) (1) の結果から

$$p_{n+1} + 2q_{n+1} = \frac{2}{3}q_n + 2\cdot\frac{1}{3}(p_n + q_n) = \frac{2}{3}(p_n + 2q_n)$$

$p_1 + 2q_1 = \dfrac{2}{3} + 2\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$ であるから，$\{p_n + 2q_n\}$ は初項 $\dfrac{4}{3}$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n + 2q_n = \frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(2) の結果から　　$p_n - q_n = -\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

上の 2 式から q_n を消去すると

$$p_n = \frac{2}{3}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\} \qquad (*)$$

$b_n = (-3)^n p_n$ より　　$\boldsymbol{b_n = \dfrac{2}{3}\{(-2)^n - 1\}}$

(4) 求める確率は，終了することなく n 回目に白球が出て，$n+1$ 回目に白球が出る確率であるから，$(*)$ より

$$\frac{2}{3}p_n = \boldsymbol{\frac{4}{9}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}}$$