令和５年度　琉球大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・農・教育学部　令和５年２月２５日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部　1　2　3　4　数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農・教育 (学校教育 [教育実践学・技術・特別支援]，生涯教育 [自然環境科学]) 学部　5　6　数 I・II・A・B (60 分)

1　$a > 0$ とする．座標平面で関数 $y = \dfrac{1}{x^a}$ のグラフ上の点 $(1,\ 1)$ における接線が x 軸と交わる点を A，y 軸と交わる点を B とし，原点を O とする．三角形 OAB の面積を $S(a)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $S(a)$ を求めよ．

(2) $S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．

2　a を実数とし，$f(x) = xe^{-|x|}$，$g(x) = ax$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の増減を調べ，$y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．
ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$ は証明なしに用いてよい．

(2) $0 < a < 1$ のとき，曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積を和を求めよ．

3　空間内に 4 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$ をとる．時刻 $t = 0$ から $t = 1$ まで 3 点 P，Q，R は次のように動くものとする．

- $t = 0$ に 3 点は点 O を出発する．
- 動点 P は線分 OA 上を速さ 1 で点 A に向かって動く．
- 動点 Q は線分 OB 上を速さ $\dfrac{1}{2}$ で点 B に向かって動く．
- 動点 R は線分 OC 上を速さ 2 で動く．$t = \dfrac{1}{2}$ までは点 C へ向かって動き，$t = \dfrac{1}{2}$ 以後は点 C から点 O に向かって動く．

時刻 t における三角形 PQR の面積を $S(t)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $S(t)$ を求めよ．

(2) $S(t)$ を最大にする t の値を求めよ．

4 1個のさいころを6の目が2回出るまで投げ続ける．$k=1,2,3,\cdots$ に対して p_k を $k+1$ 回目に2回目の6の目が出る確率とするとき，次の問いに答えよ．

(1) p_k を求めよ．

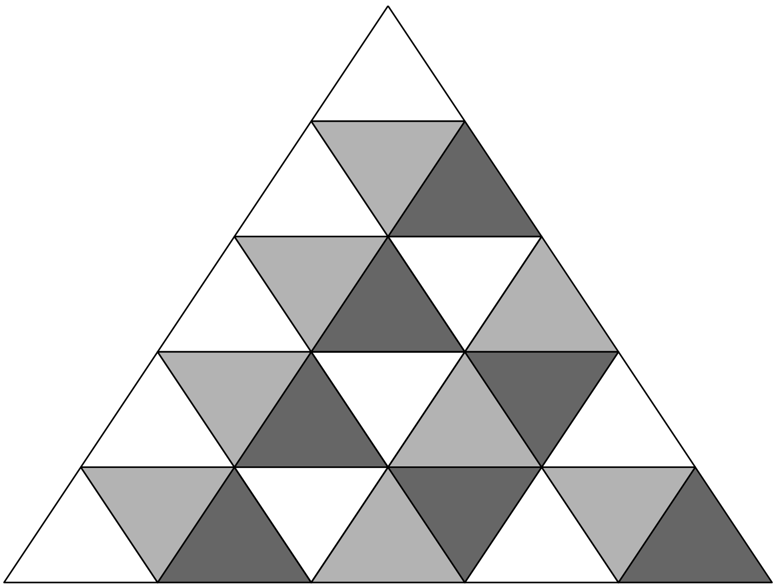
(2) p_k を最大にする k の値を求めよ．

(3) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k$ を求めよ．

5 次の問いに答えよ．

(1) $2023x+374y=17$ を満たす整数 x, y の組を1つ求めよ．

(2) 下図のように，同じ大きさの正三角形を並べて大きい正三角形を構築し，上から順番に1段目，2段目，3段目，$\cdots$ と呼ぶことにして，100段目まで並べる．さらに，下図のように，各段の小三角形を左から白色，灰色，黒色の順に繰り返し塗ることにする．このとき，100段目までの小三角形の総数と100段目までの白色の小三角形の個数を求めよ．



6 $f(x)=x^3+x^2$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の増減，極値を調べ，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(2) $0<a<1$ とする．曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=a^2(x+1)$ によって囲まれた2つの部分の面積の和 $S(a)$ を求めよ．

(3) $0<a<1$ の範囲で $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=\dfrac{1}{x^a}=x^{-a}$ を微分すると $(a>0)$ $f'(x)=-ax^{-a-1}$

$f'(1)=-a$ より，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(1,\ 1)$ における接線の方程式は

$$y-1=-a(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y=-ax+a+1$$

この直線と x 軸との交点 A の x 座標は $x=\dfrac{a+1}{a}$，y 軸との交点 B の y 座標は $y=a+1$ であるから

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+1}{a}\cdot(a+1)=\boldsymbol{\frac{(a+1)^2}{2a}}$$

(2) (1) の結果から

$$S(a)=\frac{1}{2}\left(\frac{a+1}{\sqrt{a}}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$$

相加平均・相乗平均の大小関係により $\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\geqq 2 \quad \cdots ①$

① において，等号が成立するとき

$$\sqrt{a}=\frac{1}{\sqrt{a}} \quad \text{すなわち} \quad a=1$$

よって，$a=1$ のとき，最小値 $\boldsymbol{S(1)=2}$ ■

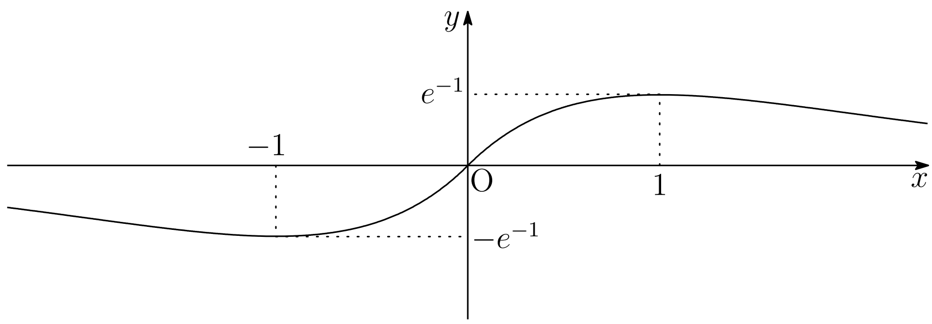
2 (1) $f(x) = x^{-|x|} = \begin{cases} xe^{-x} & (x \geqq 0) \\ xe^{x} & (x \leqq 0) \end{cases}$

$x \geqq 0$ のとき　$f'(x) = (xe^{-x})' = (1-x)e^{-x}$

$x \leqq 0$ のとき　$f'(x) = (xe^{x})' = (1+x)e^{x}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小 $-e^{-1}$	$\nearrow$	極大 e^{-1}	$\searrow$

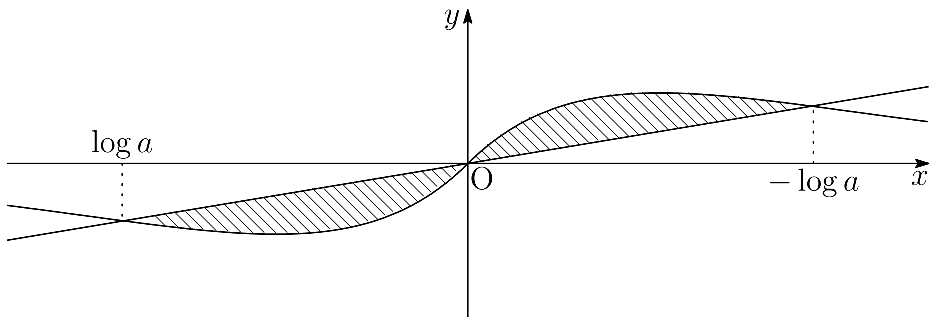
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$



補足 $f(-x) = -f(x)$ であるから，$y = f(x)$ のグラフは，原点対称．

(2) $f(x) = ax$，すなわち，$xe^{-|x|} = ax$ を解くと　$x = 0,\ \pm\log a$

$0 < a < 1$ に注意すると，曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = g(x)$ で囲まれた部分は下の図の斜線部分である．



求める面積を S とすると，原点に関する対称性に注意して

$$\frac{S}{2} = \int_0^{-\log a} (xe^{-x} - ax)\,dx = \left[-(x+1)e^{-x} - \frac{a}{2}x^2\right]_0^{-\log a}$$
$$= a(\log a - 1) - \frac{a}{2}(\log a)^2 + 1$$

よって　$S = \boldsymbol{2a(\log a - 1) - a(\log a)^2 + 2}$　■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 時刻 t における 3 点 P，Q，R の座標は $(0 \leqq t \leqq 1)$

$$\mathrm{P}(t,\ 0,\ 0),\quad \mathrm{Q}\left(0,\ \frac{t}{2},\ 0\right),\quad \mathrm{R}(0,\ 0,\ f(t))$$

ただし $f(t) = 1 - |1 - 2t| = \begin{cases} 2t & (0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}) \\ 2 - 2t & (\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1) \end{cases}$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \left(-t,\ \frac{t}{2},\ 0\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{PR}} = (-t,\ 0,\ f(t))$$

$$\begin{aligned} 4S(t)^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2 \\ &= \frac{5}{4}t^2\{t^2 + f(t)^2\} - (t^2)^2 = \frac{t^2}{4}\{t^2 + 5f(t)^2\} \\ &= \begin{cases} \dfrac{21}{4}t^4 & (0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}) \\ \dfrac{1}{4}t^2(21t^2 - 40t + 20) & (\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1) \end{cases} \end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{S(t) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{21}}{4}t^2 & \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{t}{4}\sqrt{21t^2 - 40t + 20} & \left(\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1\right) \end{cases}}$

(2) $f(t) = 16S(t)^2$ とおくと

$$f'(t) = \begin{cases} 84t^3 & (0 < t < \frac{1}{2}) \\ 84t^3 - 120t^2 + 40t & (\frac{1}{2} < t < 1) \end{cases}$$

$\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ における $f(t)$ の増減表は次のようになる．

t	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{15-\sqrt{15}}{21}$	$\cdots$	$\frac{15+\sqrt{15}}{21}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$ で $f(t)$ は単調増加であるから，上の増減表および

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{21}{16},\quad f(1) = 1 \quad \text{ゆえに} \quad f(1) < f\left(\frac{1}{2}\right)$$

の大小関係から，$f(t)$ は $t = \dfrac{15 - \sqrt{15}}{21}$ で最大となる．

よって，$S(t)$ は $\boldsymbol{t = \dfrac{15 - \sqrt{15}}{21}}$ で最大となる． ■

$\boxed{4}$ (1) k 回目までに 6 が 1 回，それ以外が $k-1$ 回出た後，$k+1$ 回目に 6 が出る確率であるから

$$p_k = {}_k\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\times\frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{k}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}}$$

(2) (1) の結果から

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{k+1}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{k} \Bigg/ \frac{k}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{5(k+1)}{6k}$$

上式から　$\dfrac{p_{k+1}}{p_k} - 1 = \dfrac{5-k}{6k}$

したがって　$p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 = p_6 > p_7 > \cdots$

p_k が最大となるとき　$\boldsymbol{k = 5,\ 6}$

(3) (1) の結果から

$$S_n = \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)\left(\frac{5}{6}\right)^{k}$$

$$\frac{5}{6}S_n = \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k} = \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k} + \frac{n}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{n}$$

上の 2 式の辺々の差をとると

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}S_n &= \frac{1}{36} + \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{k} - \frac{n}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\\ &= \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} - \frac{n}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\\ &= \frac{1}{36}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n}}{1-\frac{5}{6}} - \frac{n}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{S_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n} - \frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n}}$ ■

$\boxed{5}$ (1) $2023x+374y=17$ より　$119x+22y=1$

ユークリッドの互除法により

$$\begin{array}{r|r|r|r} & 2 & 2 & 5 \\ \hline 4) & 9) & 22) & 119 \\ & 8 & 18 & 110 \\ \hline & 1 & 4 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r|r|r} & 2 & 2 & 5 \\ \hline d) & c\ ) & b\ ) & a \\ & & & \\ \hline & 1 & d & c \end{array}$$

$a=119$，$b=22$，$c=9$，$d=4$ とおくと

$$\begin{cases} a=5b+c \\ b=2c+d \\ c=2d+1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*) \begin{cases} c=a-5b \\ d=b-2c \\ 1=c-2d \end{cases}$$

$(*)$ の 3 式から c, d を消去すると

$$1=c-2(b-2c)=-2b+5c=-2b+5(a-5b)=5a-27b$$

したがって　$119\cdot5+22\cdot(-27)=1$　よって　$\boldsymbol{(x,\ y)=(5,-27)}$

(2) k 段目の小三角形の個数は　$2k-1$

したがって，100 段目までの小三角形の総数は

$$\sum_{k=1}^{100}(2k-1)=\sum_{k=1}^{100}\{k^2-(k-1)^2\}=100^2=\mathbf{10000}$$

k 段目の白色の小三角形の個数を a_k とすると

$$a_1=1,\quad a_2=1,\quad a_3=2,\quad a_{k+3}=a_k+2$$

$k \geqq 1$ とするとき

$$\begin{aligned} a_{3k-2}&=a_1+2(k-1)=2k-1 \\ a_{3k-1}&=a_2+2(k-1)=2k-1 \\ a_{3k}&=a_3+2(k-1)=2k \end{aligned}$$

したがって，100 段目までの白色の小三角形の総数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100}a_k&=\sum_{k=1}^{33}\{a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k}\}+a_{100} \\ &=\sum_{k=1}^{33}\{3(2k-1)+1\}+67=3\cdot33^2+33+67=\mathbf{3367} \end{aligned}$$

■

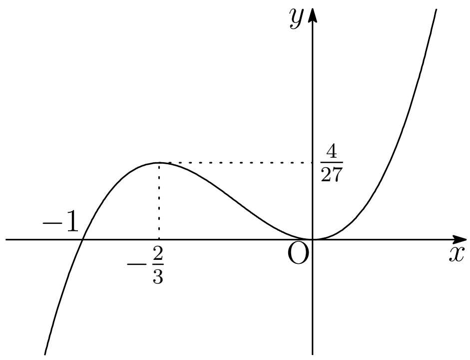
6 (1) $f(x) = x^3 + x^2$ より

$$f'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x+2)$$

$f(x)$ の増減は，次のようになる．

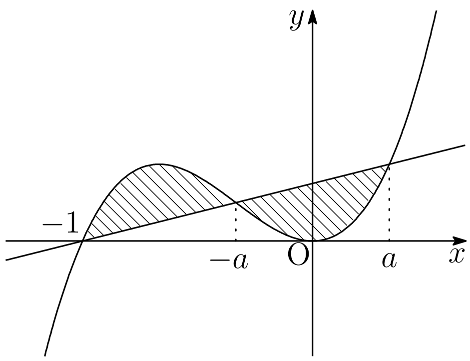
x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって，極大値 $f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \mathbf{\dfrac{4}{27}}$，極小値 $f(0) = \mathbf{0}$



(2) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = a^2(x+1)$ との共有点の x 座標は

$$x^3 + x^2 = a^2(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x+a)(x-a) = 0$$



$S(a)$ は上の図の斜線部分の面積であるから $(0 < a < 1)$

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{-1}^{-a} (x^3 + x^2 - a^2x - a^2)\,dx + \int_{-a}^{a} (a^2x + a^2 - x^3 - x^2)\,dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{a^2}{2}x^2 - a^2x \right]_{-1}^{-a} + \left[\frac{a^2}{2}x^2 + a^2x - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{a} \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{4}a^4 + 2a^3 - \frac{a^2}{2} + \frac{1}{12}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$S'(a) = -a^3 + 6a^2 - a = -a(a^2 - 6a + 1)$

$0 < a < 1$ に注意して，$S'(a) = 0$ を解くと　$a = 3 - 2\sqrt{2}$

a	(0)	$\cdots$	$3 - 2\sqrt{2}$	$\cdots$	(1)
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，$\boldsymbol{a = 3 - 2\sqrt{2}}$ で最小値をとる．■