令和４年度　琉球大学２次試験後期日程 (数学問題)
理学部 (数理科学科)　 令和４年３月 12 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ p を $0 < p < \dfrac{1}{2}$ を満たす定数とする．次の問いに答えよ．

(1) 3 次方程式 $x = p + (1-p)x^3$ の実数解のうち，2 番目に大きいものを求めよ．

(2) (1) で求めた実数解を α とする．不等式 $\alpha < p + p^3$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める．次の問いに答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n\sqrt{n}}$ を求めよ．

(2) $a_n \geqq 18000$ となるような最小の正の整数 n を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $f(x)$ は $x > 0$ において等式 $f(x) = \log x - \displaystyle\int_1^e \frac{|f(t)|}{t}\,dt$ を満たすとする．このとき，関数 $f(x)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 等式 $2^{199} = (1+1)^{199}$ と，199 が素数であることを用いて，2^{199} を 199 で割った余りを求めよ．

(2) 2^{199} を 39203 で割った余りを求めよ．ただし，39203 が $39203 = 197 \cdot 199$ と因数分解されることは証明なしに用いてよい．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x = p + (1-p)x^3$ より $\left(0 < p < \dfrac{1}{2}\right)$

$$(x-1)\{(1-p)x^2 + (1-p)x - p\} = 0$$

これを解くと　$x = 1, -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+3p}{1-p}} \quad \cdots (*)$

$f(x) = (1-p)x^2 + (1-p)x - p$ とおくと，p の値の範囲により

$$\begin{aligned} &f(-2) = 2 - 3p > 0, && f(-1) = -p < 0, \\ &f(0) = -p < 0, && f(1) = 2 - 3p > 0 \end{aligned}$$

したがって

$$-2 < -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+3p}{1-p}} < -1, \quad 0 < -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+3p}{1-p}} < 1$$

よって，$(*)$ の 2 番目に大きい解は　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+3p}{1-p}}}$

(2) (1) の結果から　$\alpha = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+3p}{1-p}}$

$$\begin{aligned} \alpha < p + p^3 &\iff \sqrt{\frac{1+3p}{1-p}} < 2(p+p^3) + 1 \\ &\iff \frac{1+3p}{1-p} < (2p + 2p^3 + 1)^2 \\ &\iff 4p^4(1 - 2p + p^2 - p^3) > 0 \\ &\iff 4p^4\{(1-2p)(1+p^2) + p^3\} > 0 \qquad (*) \end{aligned}$$

$0 < p < \dfrac{1}{2}$ であるから，$(*)$ は成立する．　証終

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\Big[\ x^{\frac{3}{2}}\ \Big]_0^1 = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

(2) $\int_{k-1}^{k} \sqrt{x}\,dx < \sqrt{k} < \int_{k}^{k+1} \sqrt{x}\,dx$ より

$$\int_0^n \sqrt{x}\,dx < \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < \int_1^{n+1} \sqrt{x}\,dx < \int_0^{n+1} \sqrt{x}\,dx$$

したがって　$\frac{2}{3}n\sqrt{n} < a_n < \frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1}$

$f(n) = \frac{2}{3}n\sqrt{n}$ とおくと　$f(n) < a_n < f(n+1)$

$f(900) = \frac{2}{3} \cdot 900\sqrt{900} = 18000$ より

$$\begin{cases} f(899) < a_{899} < f(900) \\ f(900) < a_{900} < f(901) \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad a_{899} < 18000 < a_{900}$$

よって，求める整数 n は　**900**

$\boxed{\mathbf{3}}$ $k=\displaystyle\int_1^e \frac{|f(t)|}{t}\,dt$ とおくと ($k \geqq 0$ は定数)

$$f(x)=\log x-k$$

(i) $0 \leqq k \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} k &= \int_1^e \frac{|\log t-k|}{t}\,dt \\ &= -\int_1^{e^k} \frac{\log t-k}{t}\,dt+\int_{e^k}^e \frac{\log t-k}{t}\,dt \\ &= -\left[\frac{(\log t)^2}{2}-k\log t\right]_1^{e^k}+\left[\frac{(\log t)^2}{2}-k\log t\right]_{e^k}^e \\ &= k^2-k+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$0 \leqq k \leqq 1$ に注意して，これを解くと　$k=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(ii) $k>1$ のとき

$$\begin{aligned} k &= \int_1^e \frac{|\log t-k|}{t}\,dt \\ &= \int_1^e \frac{k-\log t}{t}\,dt=\left[k\log t-\frac{(\log t)^2}{2}\right]_1^e=k-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

このとき，これを満たす k は存在しない.

(i)，(ii) より　　$\boldsymbol{f(x)=\log x-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $p=199$，$q=1,2,\cdots,p-1$ とすると

$$_p\mathrm{C}_q=\frac{p!}{q!(p-q)!}=p\cdot\frac{(p-1)!}{q!(p-q)!}$$

$q!$ および $(p-q)!$ は p を因数にもたないので，$_p\mathrm{C}_q$ は p で割り切れる．

$2^{199}=2+\displaystyle\sum_{q=1}^{p-1}{}_p\mathrm{C}_q$ より，2^{199} を 2 で割った余りは　**2**

(2) $p=199$，$r=3,4,\cdots,p-3$ とすると

$$_p\mathrm{C}_r=\frac{p!}{r!(p-r)!}=p(p-2)\cdot\frac{(p-1)\cdot(p-3)!}{r!(p-r)!}$$

$r!$ および $(p-r)!$ は p および $p-2$ を因数にもたないので，$_p\mathrm{C}_r$ は $p(p-2)$ で割り切れる．法 $p(p-2)$ について

$$\begin{aligned}2^{199}&=2\left({}_p\mathrm{C}_0+{}_p\mathrm{C}_1+{}_p\mathrm{C}_2\right)+\sum_{r=3}^{p-3}{}_p\mathrm{C}_r\\&\equiv 2\left\{1+p+\frac{p(p-1)}{2}\right\}=3p+2+p(p-2)\\&\equiv 3(p+1)-1=3\cdot 200-1=599\pmod{p(p-2)}\end{aligned}$$

よって，求める余りは　**599**