令和４年度　琉球大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・農・教育学部　令和４年２月25日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農・教育 (学校教育 [教育実践学・技術・特別支援]，生涯教育 [自然環境科学]) 学部　$\boxed{5}$ $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (60 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x > 0$ の範囲で，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}$$

と定め，$y = f(x)$ で表される曲線を C とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) 曲線 C の接線で，点 $(0,\ 1)$ を通り，傾きが負であるものを l とする．直線 l の傾きを求めよ．

(3) 曲線 C と直線 l で囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ d と n を正の整数とする．1 から n までの d 乗の和を $S_d(n) = 1^d + 2^d + \cdots + n^d$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) すべての正の整数 n について，$S_3(n) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(2) 恒等式 $k^3(k+1)^3 - (k-1)^3k^3 = 6k^5 + 2k^3$ を利用して，$S_5(n)$ を求めよ．

(3) すべての正の整数 n について，$24S_7(n)$ は整数 $n^2(n+1)^2$ で割り切れることを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 一辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，辺 OA を 2 : 1 に内分する点を D，辺 OB を 1 : 2 に内分する点を E とする．辺 OC 上に点 P をとり，線分 OP の長さを t とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\cos \angle \mathrm{EDP}$ を t を用いて表せ．

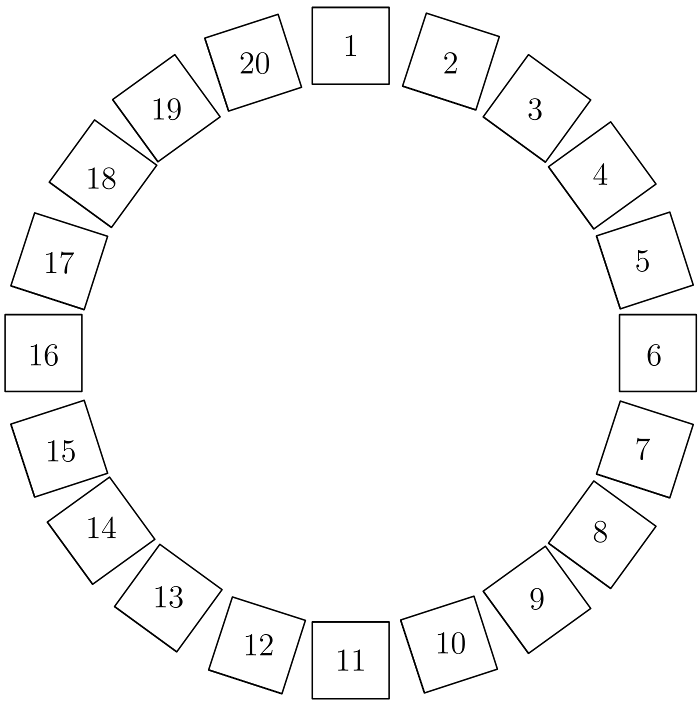
(2) 点 P が辺 OC 上を動くとき，$\cos \angle \mathrm{EDP}$ の最大値と最小値を求めよ．

4 次の問いに答えよ．

(1) 1から9までの自然数の中から，$1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 9$ を満たすように3つの数を選び，それを $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ とする．このような3つの数 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の選び方のうち，$a_2 - a_1 \geqq 3$ かつ $a_3 - a_2 \geqq 3$ を満たすものは全部で何通りあるか．

(2) 1から50まで自然数の中から，$1 \leqq a_1 < a_2 < a_3 \leqq 50$ を満たすように3つの数を選び，それを $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ とする．このような3つの数 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の選び方のうち，$a_2 - a_1 \geqq 10$ かつ $a_3 - a_2 \geqq 10$ を満たすものは全部で何通りあるか．

(3) 1番から20番までの番号が書かれた座席が，図のように円形に並んでいる．この中から，2つ以上の間隔を空けて3つの座席を選ぶ(例えば，1番を選んだときは2番，3番，19番，20番は選べない)．このような3つの座席の選び方は全部で何通りあるか．



$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $\tan\alpha = 5$ のとき $\sin 2\alpha$ を求めよ．

(2) n を正の整数とする．n を二進法で表すと 2022 桁である．このとき，n を十進法で表すと何桁になるか．ただし $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

(3) a，b を実数とする．整式 $f(x)$ と整式 $g(x)$ をそれぞれ

$$f(x) = x^4 + ax^2 - 2x + 3, \quad g(x) = x^2 + x + b$$

と定める．$f(x)$ が $g(x)$ で割り切れるような実数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 座標平面上の 2 つの放物線

$$C_1 : y = -x^2 + 2x, \quad C_2 : y = 2x^2 - 4x + 9$$

について，次の問いに答えよ．

(1) 放物線 C_1 と放物線 C_2 の両方に接する直線は 2 つ存在する．放物線 C_1 と放物線 C_2 の両方に接する直線の方程式を 2 つとも求めよ．

(2) (1) で求めた 2 つの直線および放物線 C_1 で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x}$ より　$f'(x) = \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{2(1-x)}{x^3}$

したがって，$x > 0$ における $f(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$

よって　極大値 $f(1) = \mathbf{1}$

(2) C 上の点 $\left(t, -\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{2}{t}\right)$ における接線の方程式は

$$y = \left(\frac{2}{t^3} - \frac{2}{t^2}\right)(x - t) - \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t}$$

これが点 $(0,\ 1)$ を通るから

$$1 = -\frac{2}{t^2} + \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t}\quad \text{整理すると}\quad 1 = -\frac{3}{t^2} + \frac{4}{t}$$

したがって　$t^2 - 4t + 3 = 0$　ゆえに　$t = 1,\ 3$

$f'(1) = 0$，$f'(3) = -\dfrac{4}{27}$ より，求める l の傾きは　$\boldsymbol{-\dfrac{4}{27}}$

(3) l は点 $(0,\ 1)$ を通り，傾き $-\dfrac{4}{27}$ の直線であるから　$y = -\dfrac{4}{27}x + 1$

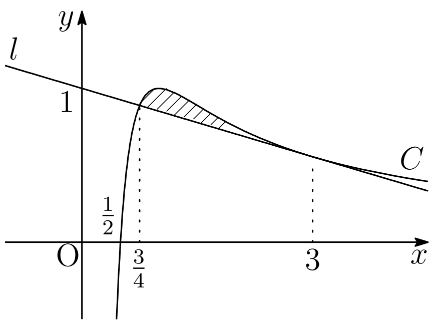
C と l の方程式から y を消去すると

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} = -\frac{4}{27}x + 1\quad \text{整理すると}\quad 4x^3 - 27x^2 + 54x - 27 = 0$$

したがって　$(x-3)^2(4x-3) = 0$　ゆえに　$x = 3,\ \dfrac{3}{4}$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{3}{4}}^{3} \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{4}{27}x - 1\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{x} + 2\log x + \frac{2}{27}x^2 - x\right]_{\frac{3}{4}}^{3} \\ &= \mathbf{4\log 2 - \frac{21}{8}} \end{aligned}$$



■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) (A) $S_3(n) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

［1］$n=1$ のとき $S_3(1) = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4} = 1^3$

よって，$n=1$ のとき，(A) は成立する．

［2］$n=k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると $S_3(k) = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$

$$\begin{aligned} S_3(k+1) &= S_3(k) + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= \frac{(k+1)^2\{k^2+4(k+1)\}}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも (A) は成立する．

［1］,［2］より，すべての自然数 n について，(A) は成立する．

(2) $k^3(k+1)^3 - (k-1)^3k^3 = 6k^5 + 2k^3$ および $k^3 = S_3(k) - S_3(k-1)$ より

$$k^5 = \frac{1}{6}\{k^3(k+1)^3 - (k-1)^3k^3\} - \frac{1}{3}\{S_3(k) - S_3(k-1)\}$$

$S_5(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^5$ であるから

$$\begin{aligned} S_5(n) &= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\{k^3(k+1)^3 - (k-1)^3k^3\} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{S_3(k) - S_3(k-1)\} \\ &= \frac{1}{6}n^3(n+1)^3 - \frac{1}{3}S_3(n) = \frac{1}{6}n^3(n+1)^3 - \frac{1}{3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2\{2n(n+1)-1\} = \boldsymbol{\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)} \end{aligned}$$

(3) $k^4(k+1)^4 - (k-1)^4k^4 = 8k^7 + 8k^5$ より

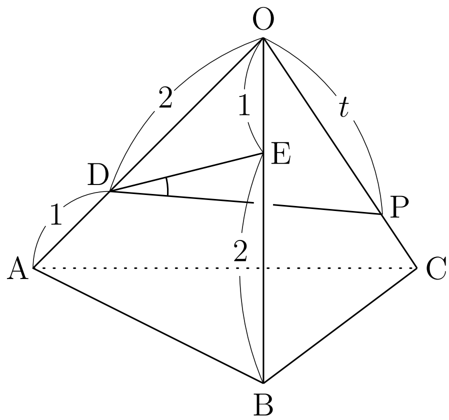
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\{k^4(k+1)^4 - (k-1)^4k^4\} &= 8\sum_{k=1}^{n}k^7 + 8\sum_{k=1}^{n}k^5 \\ n^4(n+1)^4 &= 8S_7(n) + 8S_5(n) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} 24S_7(n) &= 3n^4(n+1)^4 - 24S_5(n) \\ &= 3n^4(n+1)^4 - 2n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1) \\ &= n^2(n+1)^2\{3n^2(n+1)^2 - 2(2n^2+2n-1)\} \end{aligned}$$

よって，$24S_7(n)$ は整数 $n^2(n+1)^2$ で割り切れる． ■

3 (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと



$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2}{3}\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{3}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{c}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=t\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{a}$$

これから

$$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2=\frac{1}{9}|\vec{b}|^2-\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{9}|\vec{a}|^2=\frac{1}{9}-\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=\frac{1}{3},$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{DP}}|^2=t^2|\vec{c}|^2-\frac{4}{3}t\vec{c}\cdot\vec{a}+\frac{4}{9}|\vec{a}|^2=t^2-\frac{2}{3}t+\frac{4}{9}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\frac{1}{3}t\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{2}{3}t\vec{c}\cdot\vec{a}-\frac{2}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{9}|\vec{a}|^2=-\frac{1}{6}t+\frac{1}{3}$$

したがって

$$\cos\angle\mathrm{EDP}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DE}}||\overrightarrow{\mathrm{DP}}|}=\frac{-\frac{1}{6}t+\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{t^2-\frac{2}{3}t+\frac{4}{9}}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}(2-t)}{2\sqrt{9t^2-6t+4}}}$$

(2) $f(t)=\dfrac{\sqrt{3}(2-t)}{2\sqrt{9t^2-6t+4}}$ $(0\leqq t\leqq 1)$ とおいて，$f(t)$ を微分すると

$$f'(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{(-1)\sqrt{9t^2-6t+4}-(2-t)\cdot\dfrac{9t-3}{\sqrt{9t^2-6t+4}}}{9t^2-6t+4}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-(9t^2-6t+4)-(2-t)(9t-3)}{(9t^2-6t+4)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2-15t}{(9t^2-6t+4)^{\frac{3}{2}}}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{15}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{7}}{3}$	↘	$\frac{\sqrt{21}}{14}$

よって　最大値 $f\left(\dfrac{2}{15}\right)=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{3}}$，最小値 $f(1)=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{21}}{14}}$ ■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 5 個の石を横 1 列に並べ，その中から 3 つ選び，選んだ 3 つの石を左から a_1，a_2，a_3 とする．このとき，a_1 と a_2 および a_2 と a_3 の間にそれぞれ石を 2 個ずつ追加する操作を考える．これら 9 個並んだ石の配置について，a_1，a_2，a_3 を左から数えた順番とすればよいから，求める場合の総数は

$${}_5\mathrm{C}_3 = \mathbf{10}\ (\text{通り})$$

(2) 32 個の石を横 1 列に並べ，その中から 3 つ選び，選んだ 3 つの石を左から a_1，a_2，a_3 とする．このとき，a_1 と a_2 および a_2 と a_3 の間にそれぞれ石を 9 個ずつ追加する操作を考える．これら 50 個並んだ石の配置について，a_1，a_2，a_3 を左から数えた順番とすればよいから，求める場合の総数は

$${}_{32}\mathrm{C}_3 = \mathbf{4960}\ (\text{通り})$$

(3) 座席が横 1 列のとき，条件を満たす場合の総数は (1) と同様にして

$${}_{16}\mathrm{C}_3 = 560\ (\text{通り})$$

座席が円形であるため，この中から $(a_1,\ a_3) = (1,\ 20),\ (1,\ 19),\ (2, 20)$ の場合を除けばよい．

$(a_1,\ a_3) = (1,\ 20)$ のとき　$a_2 = 4, 5, \cdots, 17$ の 14 通り
$(a_1,\ a_3) = (1,\ 19)$ のとき　$a_2 = 4, 5, \cdots, 16$ の 13 通り
$(a_1,\ a_3) = (2,\ 19)$ のとき　$a_2 = 5, 6, \cdots, 17$ の 13 通り

よって，求める場合の総数は

$$560 - (14 + 13 + 13) = \mathbf{520}\ (\text{通り})$$

$\boxed{5}$ (1) $1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ より　$\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{1}{1+5^2} = \dfrac{1}{26}$

よって　$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\tan\alpha\cos^2\alpha = 2{\cdot}5{\cdot}\dfrac{1}{26} = \boldsymbol{\dfrac{5}{13}}$

(2) n は 2 進法で表すと 2022 桁であるから

$$2^{2021} \leqq n < 2^{2022} \quad \text{ゆえに} \quad 2021\log_{10}2 \leqq \log_{10}n < 2022\log_{10}2$$

$2021\log_{10}2 = 608.321$, $2022\log_{10}2 = 608.622$ より

$$608 \leqq \log_{10}n < 609 \quad \text{ゆえに} \quad 10^{608} \leqq n < 10^{609}$$

よって　n は **609** 桁

(3) $f(x)$ を $g(x)$ で割ると

$$f(x) = g(x)(x^2 - x + a - b + 1) + (2b - a - 3)x + 3 - b(a - b + 1)$$

$f(x)$ が $g(x)$ で割り切れるから

$$2b - a - 3 = 0, \quad 3 - b(a - b + 1) = 0 \qquad (*)$$

上の第 1 式から　$a = 2b - 3$　$\cdots$①

① を $(*)$ の第 2 式に代入すると

$$3 - b(b - 2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (b+1)(b-3) = 0$$

① より　$b = -1$ のとき $a = -5$，$b = 3$ のとき $a = 3$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b) = (-5, -1),\ (3,\ 3)}$　■

$\boxed{6}$ (1) $C_1 : y = -x^2 + 2x$ と $C_2 : y = 2x^2 - 4x + 9$ の両方に接する直線を

$$l : y = ax + b$$

とする．C_1 と l，C_2 と l の方程式からそれぞれ y を消去して整理すると

$$x^2 + (a-2)x + b = 0, \quad 2x^2 - (a+4)x + 9 - b = 0$$

これらの 2 次方程式はともに重解をもつから，係数について

$$(a-2)^2 - 4b = 0, \quad (a+4)^2 - 8(9-b) = 9 \qquad (*)$$

上の 2 式から b を消去して整理すると

$$a^2 - 16 = 0 \quad ゆえに \quad a = \pm 4$$

$(*)$ の第 1 式から，$a = 4$ のとき $b = 1$，$a = -4$ のとき $b = 9$

よって，求める 2 直線は　$\boldsymbol{y = 4x + 1,\ y = -4x + 9}$

(2) (1) で求めた 2 直線および放物線 C_1 で囲まれた部分は，下の図の斜線部分であり，直線 $x = 1$ に関して対称であるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= \int_{-1}^{1} \{4x + 1 - (-x^2 + 2x)\}\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} (x+1)^2\, dx = \frac{1}{3}\Big[\ (x+1)^3\ \Big]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}\end{aligned}$$

よって，求める面積は　$S = \boldsymbol{\dfrac{16}{3}}$