令和３年度　琉球大学２次試験後期日程 (数学問題)
理学部 (数理科学科)　令和３年３月12日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

1 関数 $y = x^3 e^{-x^2}$ の増減，極値および凹凸を調べ，そのグラフをかけ．ただし，$\lim_{x\to\infty} x^3e^{-x^2} = 0$，$\lim_{x\to-\infty} x^3e^{-x^2} = 0$ であることは証明なしに用いてよい．

2 定積分

$$\int_0^{\pi} |3\sin x + \cos x|\, dx$$

を求めよ．

3 α，β は複素数で，α の実部，虚部はどちらの 0 でない有理数であるとする．複素数平面上で 3 点 O(0)，A(α)，B(β) が正三角形の頂点となっているとき，β の実部，虚部はどちらとも無理数であることを示せ．ただし，$\sqrt{3}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい．

4 原点 O から出発して座標平面内を移動する点 A を考える．点 A は，1 回ごとに，確率 p で x 軸の正の向きに 1 だけ移動し，確率 $1-p$ で y 軸の正の向きに 1 だけ移動する．ここで $0 < p < 1$ である．点 A が 14 回移動するとき，

- E を「点 A が座標平面内の点 P(5, 4) を通る」という事象
- F を「点 A が座標平面内の点 Q(7, 7) に到達する」という事象

とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 事象 E が起こる確率 $P(E)$ を求めよ．

(2) 事象 E が起こったときの事象 F の条件付き確率 $P_E(F)$ を求めよ．

(3) 事象 F が起こったときの事象 E の条件付き確率 $P_F(E)$ を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x) = x^3e^{-x^2}$ より

$$f'(x) = (3x^2 - 2x^4)e^{-x^2} = x^2(3 - 2x^2)e^{-x^2}$$
$$f''(x) = (6x - 14x^3 + 4x^5)e^{-x^2} = 2x(2x^2 - 1)(x^2 - 3)e^{-x^2}$$

$y = f(x)$ のグラフは，原点に関して対称であるから，$x \geqq 0$ における増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	変曲点	⤴	変曲点	↗	極大	↘	変曲点	⤷

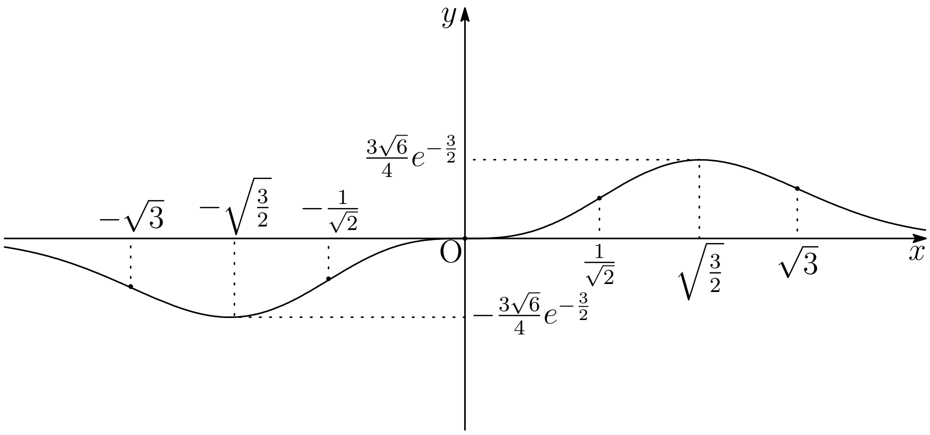
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

極大値 $\boldsymbol{f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3\sqrt{6}}{4}e^{-\frac{3}{2}}}$，極小値 $\boldsymbol{f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{3\sqrt{6}}{4}e^{-\frac{3}{2}}}$

変曲点は

$$\boldsymbol{(0,\ 0),\quad \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{\sqrt{2}}{4}e^{-\frac{1}{2}}\right),\quad \left(\pm\sqrt{3},\ \pm 3\sqrt{3}e^{-3}\right)} \quad \textbf{(複号同順)}$$

グラフの原点に関する対称性に注意してグラフをかくと



注意 $x = 0$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わることから，原点は変曲点である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}},\ \cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}\ \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$3\sin x + \cos x = \sqrt{10}\sin(x+\alpha)$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{10}}\int_0^{\pi} |3\sin x + \cos x|\,dx &= \int_0^{\pi-\alpha} \sin(x+\alpha)\,dx - \int_{\pi-\alpha}^{\pi} \sin(x+\alpha)\,dx \\ &= -\Big[\ \cos(x+\alpha)\ \Big]_0^{\pi-\alpha} + \Big[\ \cos(x+\alpha)\ \Big]_{\pi-\alpha}^{\pi} \\ &= \cos\alpha - 2\cos\pi + \cos(\pi+\alpha) = 2\end{aligned}$$

よって $\displaystyle \boldsymbol{\int_0^{\pi} |3\sin x + \cos x|\,dx = 2\sqrt{10}}$

別解 $f(x) = |3\sin x + \cos x|$ とすると，$f(x+\pi) = f(x)$ が成立するから，$f(x)$ は周期 π の周期関数である．

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(x)\,dx &= \int_0^{\pi-\alpha} f(x)\,dx + \int_{\pi-\alpha}^{\pi} f(x)\,dx \\ &= \int_0^{\pi-\alpha} f(x)\,dx + \int_{-\alpha}^{0} f(x+\pi)\,dx \\ &= \int_0^{\pi-\alpha} f(x)\,dx + \int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx \\ &= \int_{-\alpha}^{\pi-\alpha} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} f(x-\alpha)\,dx\end{aligned}$$

$f(x) = \sqrt{10}|\sin(x+\alpha)|$ より，$f(x-\alpha) = \sqrt{10}|\sin x|$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(x)\,dx &= \int_0^{\pi} f(x-\alpha)\,dx \\ &= \sqrt{10}\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \mathbf{2\sqrt{10}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\alpha = p + qi$ ($p,\ q$ は 0 でない有理数)，$w = \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$ とすると

$$\beta = w\alpha \quad \text{または} \quad \beta = \overline{w}\alpha$$

(i) $\beta = w\alpha$ のとき

$$\beta = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)(p+qi) = \frac{1}{2}(p - q\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(p\sqrt{3}+q)i$$

$p,\ q$ は 0 でない有理数より，β の実部および虚部はともに無理数である．

(ii) $\beta = \overline{w}\alpha$ のとき

$$\beta = \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)(p+qi) = \frac{1}{2}(p + q\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(-p\sqrt{3}+q)i$$

$p,\ q$ は 0 でない有理数より，β の実部および虚部はともに無理数である．

(i)，(ii) より，β の実部および虚部はともに無理数である．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $P(E) = \dfrac{9!}{5!4!}p^5(1-p)^4 = \boldsymbol{126p^5(1-p)^4}$

(2) $P_E(F) = \dfrac{P(E\cap F)}{P(E)}$，$P(E\cap F) = P(E)\cdot\dfrac{5!}{2!3!}p^2(1-p)^3$ であるから

$$P_E(F) = \frac{5!}{2!3!}p^2(1-p)^3 = \boldsymbol{10p^2(1-p)^3}$$

(3) $P_F(E) = \dfrac{P(E\cap F)}{P(F)}$，$P(F) = \dfrac{14!}{7!7!}p^7(1-p)^7 = 8\cdot3\cdot11\cdot13p^7(1-p)^7$

$$\begin{aligned} P(E\cap F) &= P(E)\cdot\frac{5!}{2!3!}p^2(1-p)^3 \\ &= 126p^5(1-p)^4\cdot10p^2(1-p)^3 \\ &= 4\cdot5\cdot7\cdot9p^7(1-p)^7 \end{aligned}$$

よって　　$P_F(E) = \dfrac{4\cdot5\cdot7\cdot9}{8\cdot3\cdot11\cdot13} = \boldsymbol{\dfrac{105}{286}}$