令和３年度　琉球大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・農・教育学部　令和３年２月25日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農・教育 (学校教育 [教育実践学・技術・特別支援]，生涯教育 [自然環境科学]) 学部は，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (60 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 関数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 7$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x) = 0$ を解け．

(2) $f(x)$ が $x = \alpha,\ \beta$ (ただし$\alpha < \beta$) で極値をとるとき，α と β を求めよ (極値を求める必要はない)．

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる領域のうち，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ を満たす部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 2e^{-a_n} - 1 + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める．次の問いに答えよ．次の問いに答えよ．ただし，$2 < e < 3$ であることは証明なしに用いてよい．

(1) $f(x) = e^{-x} - 1 + x$ とする．$0 < x < 1$ のとき，不等式

$$0 < f(x) < \frac{2}{3}x$$

が成り立つことを示せ．

(2) $b_n = a_n - \log 2$ とする．すべての正の整数 n について $0 < b_n < 1$ となることを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

3 xy 平面上で，極方程式

$$r = \frac{1}{1+\cos\theta}$$

により与えられる曲線 C を考える．次の問いに答えよ．

(1) 曲線 C の概形を図示せよ．

(2) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とし，曲線 C 上の，極座標が $(r,\ \theta)$ である点 P を考える．点 P における曲線 C の接線の傾きは $-\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ であることを示せ．

(3) (2) の点 P から y 軸におろした垂線と y 軸との交点を H，原点を O とする．$\angle$OPH の二等分線と，点 P における曲線 C の接線は直交することを示せ．

4 袋 A には赤玉が 1 個と白玉が 2 個，袋 B には赤玉が 3 個と白玉が 2 個入っている．袋 B から玉を 2 個取り出して袋 A に入れ，よく混ぜてから，袋 A から玉を 1 個取り出して，色を見てから袋 A に戻す．さらに，よく混ぜてから，もう一度袋 A から玉を 1 個取り出す．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 袋 B に白玉がちょうど 1 個残っている確率を求めよ．

(2) 袋 A から最初に取り出す玉が白玉である確率を求めよ．

(3) 袋 A から二度とも白玉を取り出す確率を求めよ．

5 次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $(x^2+y^2-2)(y-x^2) > 0$ の表す領域を図示せよ．

(2) 15334 と 30381 の最大公約数を求めよ．

(3) 方程式 $2^x - (\sqrt{2})^{x+1} - 4 = 0$ を解け．

6 関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ について，次の問いに答えよ．

(1) $y = f(x)$ の極値を調べ，そのグラフをかけ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ について，傾きが 9 で y 切片が正である接線の方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた接線と曲線 $y = f(x)$ によって囲まれる部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $(*)$ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 7$ について，$f(1) = 0$ であるから，因数定理により，$f(x)$ は $x - 1$ を因数にもち

$$f(x) = (x-1)(2x^2 - x - 7)$$

したがって，$f(x) = 0$ の解は　$\boldsymbol{x = 1,\ \dfrac{1 \pm \sqrt{57}}{4}}$

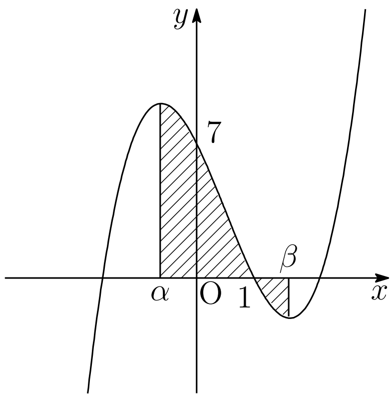
(2) $(*)$ を微分すると　$f'(x) = 6x^2 - 6x - 6 = 6(x^2 - x - 1)$

$f'(x) = 0$ を解くと　$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$f'(x) = 6\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

ゆえに，$f(x)$ は $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ で極値をとる．

よって　$\boldsymbol{\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ \beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$



(3) $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x$ とおく．

求める面積は上の図の斜線部分でその面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^1 f(x)\,dx - \int_1^\beta f(x)\,dx = \Big[\ F(x)\ \Big]_\alpha^1 - \Big[\ F(x)\ \Big]_1^\beta \\ &= 2F(1) - \{F(\alpha) + F(\beta)\} \\ &= 2\cdot\frac{7}{2} - \frac{1}{2}(\alpha^4 + \beta^4) + (\alpha^3 + \beta^3) + 3(\alpha^2 + \beta^2) - 7(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

ここで，$\alpha + \beta = 1,\ \alpha\beta = -1$ より

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 1^2 - 2\cdot(-1) = 3 \\ \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = 1^3 - 3\cdot(-1)\cdot 1 = 4 \\ \alpha^4 + \beta^4 &= (\alpha^2+\beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2 = 3^2 - 2\cdot 1^2 = 7 \end{aligned}$$

よって　$S = 7 - \dfrac{1}{2}\cdot 7 + 4 + 3\cdot 3 - 7\cdot 1 = \boldsymbol{\dfrac{19}{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x) = e^{-x} - 1 + x$ より　$f'(x) = -e^{-x} + 1$

$0 < x < 1$ において，$f'(x) > 0$ であるから，$f(x)$ は単調増加

$$f(0) < f(x) \quad \text{すなわち} \quad 0 < f(x) \quad \cdots ①$$

次に，$g(x) = \dfrac{2}{3}x - f(x) = -e^{-x} - \dfrac{1}{3}x + 1$ とおくと

$$g'(x) = e^{-x} - \frac{1}{3}$$

$0 < x < 1$ において，$g'(x) > 0$ であるから，$g(x)$ は単調増加

$$g(0) < g(x) \quad \text{すなわち} \quad 0 < g(x) = \frac{2}{3}x - f(x) \quad \cdots ②$$

①，② より，$0 < x < 1$ において　$0 < f(x) < \dfrac{2}{3}x \quad \cdots (*)$

(2) $a_n = b_n + \log 2$ を $a_{n+1} = 2e^{-a_n} - 1 + a_n$ に代入すると

$$b_{n+1} + \log 2 = 2e^{-b_n - \log 2} - 1 + b_n + \log 2$$

整理すると　$b_{n+1} = e^{-b_n} - 1 + b_n$　すなわち　$b_{n+1} = f(b_n)$

$b_1 = a_1 - \log 2 = 1 - \log 2 = \log \dfrac{e}{2}$　ゆえに　$0 < b_1 < 1$

$0 < b_k < 1$ と仮定すると，(1) の結果から

$$0 < f(b_k) < \frac{2}{3}b_k \quad \text{すなわち} \quad 0 < b_{k+1} < \frac{2}{3} < 1$$

$0 < b_1 < 1$ であるから，数学的帰納法により，すべての自然数 n について

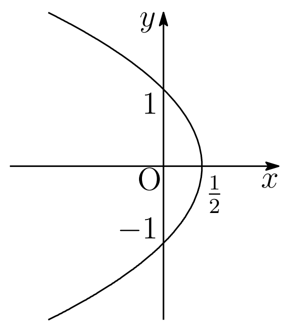
$$0 < b_n < 1$$

(3) (2) の結果を $(*)$ に代入すると　$0 < b_{n+1} < \dfrac{2}{3}b_n$

$$0 < b_n < b_1\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(b_n + \log 2) = \mathbf{\log 2}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $r=\dfrac{1}{1+\cos\theta}$ より



$$r+r\cos\theta=1 \quad \text{ゆえに} \quad r=1-x$$

両辺を平方すると

$$x^2+y^2=1-2x+x^2$$

よって $\quad x=-\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{1}{2}$

(2) (1) の結果の両辺を x で微分すると $\quad 1=-yy' \quad \cdots①$

$y=r\sin\theta$ および $r=\dfrac{1}{1+\cos\theta}$ から $\quad y=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \quad \cdots②$

② を ① に代入すると $\quad 1=-\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}y'$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\sin\theta\neq 0$ に注意して $\quad y'=-\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

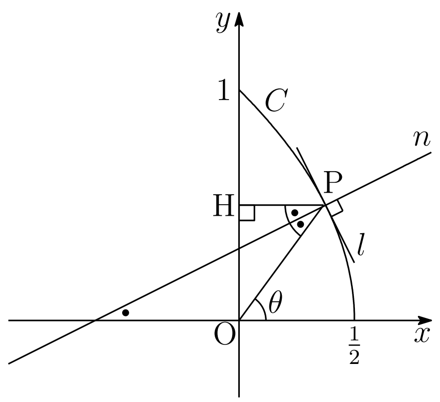
(3) C 上の点 P における接線 l の傾きは，(2) で求めた

$$-\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

直線 OP の偏角が θ であるから，$\angle$OPH の二等分線 n とすると，その偏角が $\dfrac{\theta}{2}$ であるから，n の傾きは

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

求めた l と n の傾きの積が -1 であるから，これらの直線は直交する．



$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 求める確率は，袋 B から赤玉 1 個と白玉 1 個を取り出す確率であるから

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3\cdot 2}{10}=\boldsymbol{\frac{3}{5}}$$

(2) (i) 袋 B から赤玉 2 個を取り出す確率を p とすると

$$p=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$$

このとき，袋 A には赤玉 3 個と白玉 2 個になるから，袋 A から 1 個玉を取り出したとき，白玉である確率は $\dfrac{2}{5}$

(ii) (1) で求めた袋 B から赤玉 1 個と白玉 1 個を取り出す確率を q とする．

$$q=\frac{6}{10}$$

このとき，袋 A には赤玉 2 個と白玉 3 個になるから，袋 A から 1 個玉を取り出したとき，白玉である確率は $\dfrac{3}{5}$

(iii) 袋 B から白玉 2 個を取り出す確率を r とすると

$$r=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$$

このとき，袋 A には赤玉 1 個と白玉 4 個になるから，袋 A から 1 個玉を取り出したとき，白玉である確率は $\dfrac{4}{5}$

よって，求める確率は

$$p\cdot\frac{2}{5}+q\cdot\frac{3}{5}+r\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{5}+\frac{6}{10}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{5}=\frac{28}{50}=\boldsymbol{\frac{14}{25}}$$

(3) (2) と同様にして

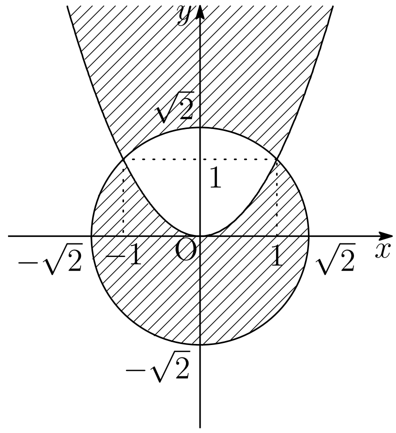
$$\begin{aligned}p\left(\frac{2}{5}\right)^2+q\left(\frac{3}{5}\right)^2+r\left(\frac{4}{5}\right)^2&=\frac{3}{10}\left(\frac{2}{5}\right)^2+\frac{6}{10}\left(\frac{3}{5}\right)^2+\frac{1}{10}\left(\frac{4}{5}\right)^2\\&=\frac{82}{250}=\boldsymbol{\frac{41}{125}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $(x^2+y^2-2)(y-x^2)>0$ より

$$\begin{cases} x^2+y^2-2>0 \\ y-x^2>0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x^2+y^2-2<0 \\ y-x^2<0 \end{cases}$$

すなわち $\begin{cases} x^2+y^2>2 \\ y>x^2 \end{cases}$ または $\begin{cases} x^2+y^2<2 \\ y<x^2 \end{cases}$

よって，求める領域は，下の図の斜線部分で境界線を含まない．



(2) ユークリッドの互除法により

$$\begin{aligned} 30381 &= 15334 \times 1 + 15047 \\ 15334 &= 15047 \times 1 + 287 \\ 15047 &= 287 \times 52 + 123 \\ 287 &= 123 \times 2 + 41 \\ 123 &= 41 \times 3 \end{aligned}$$

よって，求める最大公約数は　**41**

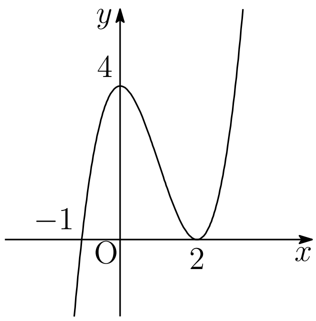
(3) 方程式 $2^x-(\sqrt{2})^{x+1}-4=0$ より　$(\sqrt{2})^{2x}-\sqrt{2}(\sqrt{2})^x-4=0$

$t=(\sqrt{2})^x$ とおくと $(t>0)$　　$t^2-\sqrt{2}t-4=0$

$$(t+\sqrt{2})(t-2\sqrt{2})=0 \quad \text{ゆえに} \quad t=2\sqrt{2}$$

したがって　$(\sqrt{2})^x=(\sqrt{2})^3$　よって　$\boldsymbol{x=3}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ より



$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって　極大値 $f(0) = \mathbf{4}$
　　　　極小値 $f(2) = \mathbf{0}$

(2) $f'(x) = 9$ より　$3x^2 - 6x = 9$

$$(x+1)(x-3) = 0 \quad ゆえに \quad x = -1,\ 3$$

(1) で求めたグラフから，接線の傾きが 9 で y 切片が正であるのは，点 $(-1,\ 0)$ を通る直線である．

$$y - 0 = 9(x+1) \quad ゆえに \quad \boldsymbol{y = 9x + 9}$$

(3) (2) で求めた接線と曲線 $y = f(x)$ のグラフの共有点の x 座標は

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 9x + 9 \quad ゆえに \quad (x+1)^2(5-x) = 0$$

これを解いて　$x = -1,\ 5$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{5} \{9x + 9 - (x^3 - 3x^2 + 4)\} \\ &= \int_{-1}^{5} (x+1)^2(5-x)\,dx \\ &= \frac{1}{12}\{5 - (-1)\}^4 = \mathbf{108} \end{aligned}$$

補足 積分公式[1]

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m(\beta - x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．