令和２年度　琉球大学２次試験後期日程 (数学問題)
理学部 (数理科学科)　 令和２年３月12日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ.

(1) 座標平面上で 2 つの不等式

$$x^2 + y^2 \leqq 12, \quad y \geqq x^2$$

によって定まる領域を D とする．D の面積 S を求めよ.

(2) 座標平面上で 4 つの不等式

$$x^2 + y^2 \leqq 12, \quad y \leqq x^2, \quad x \geqq 0, \quad y \geqq 0$$

によって定まる領域を E とする．E を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $f(x) = \dfrac{e^x}{(e^x - 1)^2}$ について次の問いに答えよ.

(1) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{\log 2}^{\log 3} xf(x)\,dx$ を求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\triangle$ABC の内部の点 P について，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} + 3\overrightarrow{\mathrm{BP}} + 4\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \vec{0}$ が成り立っている．$\triangle$ABC の面積を S とするとき，$\triangle$PBC，$\triangle$PCA，$\triangle$PAB の面積をそれぞれ S を用いて表せ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 数直線上の点 P を次の規則で移動させる．一枚の硬貨を投げて，表が出れば P を $+1$ だけ移動させ，裏が出れば P を原点に関して対称な点に移動させる．P は初め原点にあるとし，硬貨を n 回投げた後の P の座標を a_n とする．ただし，n は正の整数とする．このとき，次の問いに答えよ.

(1) $a_3 = 0$ となる確率を求めよ.

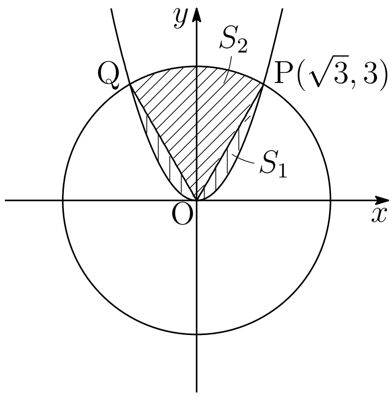
(2) $a_4 = 1$ となる確率を求めよ.

(3) $n \geqq 3$ のとき，$a_n = -(n-2)$ となる確率を p_n とする．$p_n = \dfrac{1}{2^n}$ であることを示せ.

(4) $n \geqq 3$ のとき，$a_n = n - 3$ となる確率を q_n とする．q_n を n を用いて表せ.

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 円 $x^2+y^2=12$ と放物線 $y=x^2$ の共有点を



$$\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 3),\quad \mathrm{Q}(-\sqrt{3},\ 3)$$

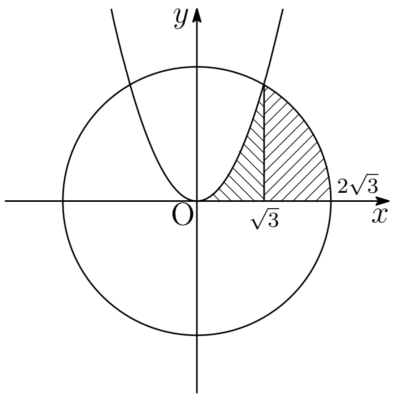
とすると，直線 OP と放物線 $y=x^2$ で囲まれる部分の面積を S_1 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{3}x - x^2)\,dx \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} x(\sqrt{3}-x)\,dx = \frac{1}{6}(\sqrt{3})^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$\mathrm{OP}=2\sqrt{3}$，$\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{\pi}{3}$ より　$S_2=\dfrac{1}{2}(2\sqrt{3})^2\cdot\dfrac{\pi}{3}=2\pi$

よって，求める面積は　$2S_1+S_2=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+2\pi=\boldsymbol{\sqrt{3}+2\pi}$

(2) 求める回転体の体積を V とすると



$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^{\sqrt{3}} (x^2)^2\,dx + \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} (12-x^2)\,dx \\ &= \left[\,\frac{x^5}{5}\,\right]_0^{\sqrt{3}} + \left[\,12x-\frac{x^3}{3}\,\right]_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{34\sqrt{3}}{5} \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V=\dfrac{34\sqrt{3}}{5}\pi}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$ について，$t=e^x$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=e^x$

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{e^x}{(e^x-1)^2}\,dx=\int\frac{dt}{(t-1)^2}$$
$$=-\frac{1}{t-1}+C=\boldsymbol{-\frac{1}{e^x-1}+C}\quad\textbf{(}\boldsymbol{C}\ \textbf{は積分定数)}$$

(2) $F(x)=-\dfrac{1}{e^x-1}$ とおくと

$$\int F(x)\,dx=-\int\frac{1}{e^x-1}dx=\int\left(1-\frac{e^x}{e^x-1}\right)dx$$
$$=x-\log|e^x-1|+C\quad(C\ \text{は積分定数})$$

$F'(x)=f(x)$ であるから

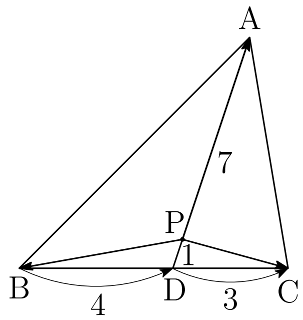
$$\int_{\log 2}^{\log 3}xf(x)\,dx=\int_{\log 2}^{\log 3}xF'(x)\,dx$$
$$=\Big[\,xF(x)\,\Big]_{\log 2}^{\log 3}-\int_{\log 2}^{\log 3}F(x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{x}{e^x-1}\right]_{\log 2}^{\log 3}-\Big[\,x-\log|e^x-1|\,\Big]_{\log 2}^{\log 3}$$
$$=\mathbf{3\log 2-\frac{3}{2}\log 3}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{BP}}+4\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=-3\overrightarrow{\mathrm{PB}}-4\overrightarrow{\mathrm{PC}}=-7\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+4\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{7}$$

線分 BC を 4 : 3 に内分する点を D とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=-7\overrightarrow{\mathrm{PD}}$$



よって　$\triangle\mathrm{PBC}=\boldsymbol{\frac{1}{8}S}$，$\triangle\mathrm{PCA}=\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{8}\mathrm{S}=\boldsymbol{\frac{3}{8}S}$，$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{8}\mathrm{S}=\boldsymbol{\frac{1}{2}S}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $P(a_1=0)=\dfrac{1}{2}$，$P(a_1=1)=\dfrac{1}{2}$,

$P(a_2=-1)=\dfrac{1}{2}P(a_1=1)=\dfrac{1}{4}$，$P(a_2=0)=\dfrac{1}{2}P(a_1=0)=\dfrac{1}{4}$,

$P(a_2=1)=\dfrac{1}{2}P(a_1=0)=\dfrac{1}{4}$，$P(a_2=2)=\dfrac{1}{2}P(a_1=1)=\dfrac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
P(a_3=-2)&=\frac{1}{2}P(a_2=2)=\frac{1}{8},\\
P(a_3=-1)&=\frac{1}{2}P(a_2=1)=\frac{1}{8},\\
P(a_3=0)&=\frac{1}{2}P(a_2=-1)+\frac{1}{2}P(a_2=0)=\frac{1}{4},\\
P(a_3=1)&=\frac{1}{2}P(a_2=-1)+\frac{1}{2}P(a_2=0)=\frac{1}{4},\\
P(a_3=2)&=\frac{1}{2}P(a_2=1)=\frac{1}{8},\\
P(a_3=3)&=\frac{1}{2}P(a_2=2)=\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

よって，$a_3=0$ となる確率は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}
P(a_4=1)&=\frac{1}{2}P(a_3=-1)+\frac{1}{2}P(a_3=0)\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{3}{16}}
\end{aligned}$$

(3) $p_n=P(a_n=-n+2)=\dfrac{1}{2}P(a_{n-1}=n-2)$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}P(a_1=0)=\frac{1}{2^n}$$

(4) $q_n=P(a_n=n-3)$ であるから

$$\begin{aligned}
q_{n+1}=P(a_{n+1}=n-2)&=\frac{1}{2}P(a_n=n-3)+\frac{1}{2}P(a_n=-n+2)\\
&=\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}p_n=\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

$2^{n+1}q_{n+1}-2^nq_n=1$，$q_3=P(a_3=0)=\dfrac{1}{4}$ であるから，$n>3$ のとき

$$\sum_{k=3}^{n-1}(2^{k+1}q_{k+1}-2^kq_k)=n-3 \quad \text{ゆえに} \quad 2^nq_n-2=n-3$$

$n=3$ のときも成立ことから　　$\boldsymbol{q_n=\dfrac{n-1}{2^n}}$