令和２年度　琉球大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・農・教育学部　令和２年２月25日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部　1 2 3 4 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農・教育 (学校教育 [教育実践学・技術・特別支援]，生涯教育 [自然環境科学]) 学部　5 6 数 I・II・A・B (60 分)

1 関数 $y = x^3 + x - 1$ の表す曲線 C について，次の問いに答えよ．

(1) C 上の点 $(t,\ t^3 + t - 1)$ における接線の方程式を，t を用いて表せ．

(2) 点 $(0,\ 1)$ を通る C の接線を ℓ とする．ℓ の方程式と接点の座標を求めよ．

(3) C と (2) で求めた ℓ で囲まれる部分の面積 S を求めよ．

2 a を正の実数とする．$x > 0$ において，曲線 $y = \log x$ と曲線 $y = \sqrt{ax}$ が共有点をもたないような a の値の範囲を求めよ．

3 i を虚数単位とし，複素数 a_n を

$$a_1 = -1, \quad a_{n+1} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} a_n + \sqrt{3}i \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める．また，複素数 b_n を

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = a_n b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $a_2,\ a_3,\ a_4$ を求めよ．

(2) すべての正の整数 n について $a_{n+3} = a_n$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) b_n を求めよ．

4 1 から 7 までの数を 1 つずつ書いた 7 個の玉が，袋の中に入っている．袋から玉を 1 個取り出し，書かれている数を記録して袋に戻す．この試行を n 回繰り返して得られる n 個の数の和が 4 の倍数となる確率を p_n とする．ただし，n は正の整数とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) p_1 と p_2 を求めよ．

(2) p_{n+1} を p_n の式で表せ．

(3) p_n を求めよ．

5 次の問いに答えよ．

(1) $\cos 15^\circ$ の値を求めよ．

(2) 6400^{50} は何桁の整数か．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

(3) 平行四辺形 ABCD において，辺 BC を $2:3$ に内分する点を E とし，対角線 BD と線分 AE の交点を P とする．$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と表すとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ．

6 実数 $a > 1$ に対して，$f(x) = x^2 + 2x - a^2 + 2a$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) 2 次方程式 $f(x) = 0$ の解を a を用いて表せ．

(2) 放物線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = a$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しいとき，$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ を示し，このときの a の値を求めよ．

解答例

1 (1) $C : y = x^3 + x - 1$ より　$y' = 3x^2 + 1$

C 上の点 $(t,\ t^3 + t - 1)$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 + t - 1) = (3t^2 + 1)(x - t)$$

よって　$\boldsymbol{y = (3t^2 + 1)x - 2t^3 - 1}$

(2) (1) で求めた接線が点 $(0,\ 1)$ を通るとき

$$1 = -2t^3 - 1 \quad \text{ゆえに} \quad (t+1)(t^2 - t + 1) = 0$$

t は実数であるから　$t = -1$　これを (1) の結果に代入して

$$\text{接点 } \boldsymbol{(-1,\ -3)},\ \text{接線 } \boldsymbol{\ell : y = 4x + 1}$$

(3) C，ℓ の方程式より

$$4x + 1 - (x^3 + x - 2) = (x+1)^2(2 - x) \quad \cdots (*)$$

C と ℓ の共有点の x 座標は $x = -1,\ 2$

$(*)$ より，$-1 \leqq x \leqq 2$ において，$4x + 1 \geqq x^3 + x - 2$ に注意して

$$S = \int_{-1}^{2} (x+1)^2(2 - x) = \frac{1}{12}\{2 - (-1)\}^4 = \boldsymbol{\frac{27}{4}}$$

補足 積分公式[1]

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n \, dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta - \alpha)^{m+n+1}}$$

■

2 $f(x) = \sqrt{ax} - \log x$ とおくと　$f'(x) = \dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{ax} - 2}{2x}$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{4}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

このとき極小値 $f\left(\dfrac{4}{a}\right) = 2 - \log\dfrac{4}{a} > 0$ であるから

$$2 > \log\frac{4}{a} \quad \text{ゆえに} \quad e^2 > \frac{4}{a} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a > 4e^{-2}}$$

■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の 1 を参照.

3 (1) 与えられた漸化式から

$$a_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_1+\sqrt{3}i=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}(-1)+\sqrt{3}i=\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}$$
$$a_3=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_2+\sqrt{3}i=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\sqrt{3}i=\boldsymbol{-1+\sqrt{3}i}$$
$$a_4=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_3+\sqrt{3}i=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}(-1+\sqrt{3}i)+\sqrt{3}i=\boldsymbol{-1}$$

(2) すべての自然数 m について，

$$a_{3m+1}=a_1,\ a_{3m+2}=a_2,\ a_{3m+3}=a_3 \quad \cdots(\mathrm{A})$$

が成立する．

［1］(1) の結果より，$a_4=a_1$．さらに，与えられた漸化式より

$$a_5=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_4+\sqrt{3}i=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_1+\sqrt{3}i=a_2$$
$$a_6=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_5+\sqrt{3}i=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_2+\sqrt{3}i=a_3$$

したがって，$m=1$ のとき，(A) が成立する．

［2］$m=k$ のとき，(A) が成立する，すなわち

$$a_{3k+1}=a_1,\ a_{3k+2}=a_2,\ a_{3k+3}=a_3$$

が成立すると仮定すると，漸化式および (1) の結果により

$$a_{3k+4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_{3k+3}+\sqrt{3}i=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_3+\sqrt{3}i=a_4=a_1,$$
$$a_{3k+5}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_{3k+4}+\sqrt{3}i=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_1+\sqrt{3}i=a_2,$$
$$a_{3k+6}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_{3k+5}+\sqrt{3}i=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}a_2+\sqrt{3}i=a_3$$

したがって，$m=k+1$ のときも (A) が成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 m について，(A) が成立する．

(A) が成立することから，すべての正の整数 n について，次が成立する．

$$a_{n+3}=a_n \quad (n\text{ は正の整数})$$

(3) (1) の結果から

$$a_1a_2a_3=(-1)\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot(-1+\sqrt{3}i)=2$$

$b_{n+1}=a_nb_n$ より，$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=a_n$ であるから，これと (2) の結果より

$$\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdot\frac{b_4}{b_3}=\frac{b_5}{b_4}\cdot\frac{b_6}{b_5}\cdot\frac{b_7}{b_6}=\cdots=\frac{b_{3m-1}}{b_{3m-2}}\cdot\frac{b_{3m}}{b_{3m-1}}\cdot\frac{b_{3m+1}}{b_{3m}}=a_1a_2a_3=2$$

これらの積をとると

$$\left(\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdot\frac{b_4}{b_3}\right)\left(\frac{b_5}{b_4}\cdot\frac{b_6}{b_5}\cdot\frac{b_7}{b_6}\right)\cdots\left(\frac{b_{3m-1}}{b_{3m-2}}\cdot\frac{b_{3m}}{b_{3m-1}}\cdot\frac{b_{3m+1}}{b_{3m}}\right)=2^m$$

したがって　$\dfrac{b_{3m+1}}{b_1}=2^m$　$b_1=1$ より　$b_{3m+1}=2^m$　$\cdots$①

① は，$m=0$ のときも成立するから，次が成立する．

$$(*)\quad b_{3m-2}=2^{m-1}\quad (m\text{ は自然数})$$

$(*)$ および漸化式 $b_{n+1}=a_nb_n$ により

$$\begin{aligned}b_{3m-1}&=a_{3m-2}b_{3m-2}=a_1b_{3m-2}\\&=-1\cdot2^{m-1}=-2^{m-1},\\b_{3m}&=a_{3m-1}b_{3m-1}=a_2b_{3m-1}\\&=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot(-2^{m-1})=-(1+\sqrt{3}i)2^{m-2}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{b_n=\begin{cases}2^{m-1} & (n=3m-2)\\ -2^{m-1} & (n=3m-1)\\ -(1+\sqrt{3}i)2^{m-2} & (n=3m)\end{cases}}$

■

4 (1) $\boldsymbol{p_1 = \dfrac{1}{7}}$

2 回繰り返して得られる 2 個の数の和が 4 の倍数となるのは，次の 13 通り

1 回目	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	7	7
2 回目	3	7	2	6	1	5	4	3	7	2	6	1	5

よって　$p_2 = \dfrac{13}{7^2} = \boldsymbol{\dfrac{13}{49}}$

(2) n 回繰り返して得られる n 個の数の和を 4 で割った余りが 0，1，2，3 である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n，s_n とすると

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{7}p_n + \frac{2}{7}q_n + \frac{2}{7}r_n + \frac{2}{7}s_n \\ &= \frac{1}{7}p_n + \frac{2}{7}(q_n + r_n + s_n) \end{aligned}$$

$p_n + q_n + r_n + s_n = 1$ であるから

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{7}p_n + \frac{2}{7}(1 - p_n) \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{7}p_n + \frac{2}{7}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　$p_{n+1} - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{7}\left(p_n - \dfrac{1}{4}\right)$

数列 $\left\{p_n - \dfrac{1}{4}\right\}$ は，初項 $p_1 - \dfrac{1}{4}$，公比 $-\dfrac{1}{7}$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{4} &= \left(p_1 - \frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1} \\ p_n &= -\frac{3}{28}\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1} + \frac{1}{4} \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{7}\right)^{n} + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

■

5 (1) 加法定理により

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ)\\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

(2) $6400^{50} = (2^6\cdot 10^2)^{50} = 2^{300}\cdot 10^{100}$ より

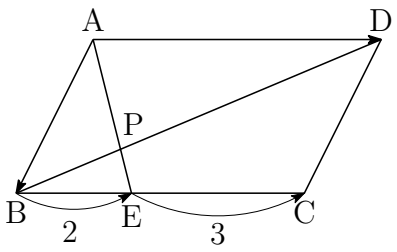
$$\begin{aligned}\log_{10} 6400^{50} &= \log_{10} 2^{300}\cdot 10^{100}\\ &= \log_{10} 2^{300} + \log_{10} 10^{100} = 300\log_{10} 2 + 100\\ &= 300\times 0.3010 + 100 = 190.30\end{aligned}$$

$190 < \log_{10} 6400^{50} < 191$ であるから

$$\log_{10} 10^{190} < \log_{10} 6400^{50} < \log_{10} 10^{191}$$

したがって　$10^{190} < 6400^{50} < 10^{191}$　よって　**191 桁**

(3) BE : EC = 2 : 3 より



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AE}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \vec{b} + \frac{2}{5}\vec{d}\\ &= \frac{5\vec{b}+2\vec{d}}{5} = \frac{7}{5}\cdot\frac{5\vec{b}+2\vec{d}}{7}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{5\vec{b}+2\vec{d}}{7}}$

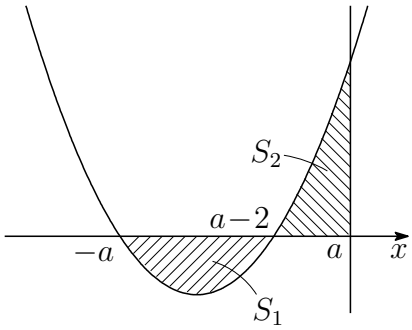
■

6 (1) $f(x)=x^2+2x-a^2+2a$ について，$f(x)=0$ とおくと

$$x^2+2x-a^2+2a=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x+a)(x-a+2)=0$$

よって　$\boldsymbol{x=-a,\ a-2}$

(2) (1) の結果から，右の図の斜線部分の面積を



$$S_1=-\int_{-a}^{a-2} f(x)\,dx$$
$$S_2=\int_{a-2}^{a} f(x)\,dx$$

とおくと，$S_1=S_2$ より

$$-\int_{-a}^{a-2} f(x)\,dx=\int_{a-2}^{a} f(x)\,dx \quad \text{ゆえに} \quad \int_{-a}^{a-2} f(x)\,dx+\int_{a-2}^{a} f(x)\,dx=0$$

よって　$\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0 \quad \cdots(*)$

(1) の結果から
$$\begin{aligned} f(x)&=(x+a)(x-a+2)\\ &=(x+a)\{(x+a)-2(a-1)\}\\ &=(x+a)^2-2(a-1)(x+a)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx&=\int_{-a}^{a}\{(x+a)^2-2(a-1)(x+a)\}\,dx\\ &=\left[\frac{1}{3}(x+a)^3-(a-1)(x+a)^2\right]_{-a}^{a}\\ &=\frac{8}{3}a^3-4(a-1)a^2\\ &=\frac{4}{3}a^2\{2a-3(a-1)\}=\frac{4}{3}a^2(3-a)\end{aligned}$$

$(*)$ であるから，$a>1$ に注意して　$\boldsymbol{a=3}$ ■