

令和2年度 琉球大学2次試験前期日程 (数学問題)

理・工・医・農・教育学部 令和2年2月25日

- 理・工・医・教育[数学]学部は, [1] ~ [4] 数I・II・III・A・B (120分)
- 農・教育(学校教育[教育実践学・技術・特別支援], 生涯教育[自然環境科学])学部は, [5], [6] 数I・II・A・B (60分)

[1] 関数 $y = x^3 + x - 1$ の表す曲線 C について, 次の問いに答えよ.

- (1) C 上の点 $(t, t^3 + t - 1)$ における接線の方程式を, t を用いて表せ.
- (2) 点 $(0, 1)$ を通る C の接線を l とする. l の方程式と接点の座標を求めよ.
- (3) C と (2) で求めた l で囲まれる部分の面積 S を求めよ.

[2] a を正の実数とする. $x > 0$ において, 曲線 $y = \log x$ と曲線 $y = \sqrt{ax}$ が共有点をもたないような a の値の範囲を求めよ.

[3] i を虚数単位とし, 複素数 a_n を

$$a_1 = -1, \quad a_{n+1} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} a_n + \sqrt{3}i \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める. また, 複素数 b_n を

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = a_n b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) a_2, a_3, a_4 を求めよ.
 - (2) すべての正の整数 n について $a_{n+3} = a_n$ が成り立つことを, 数学的帰納法を用いて証明せよ.
 - (3) b_n を求めよ.
- [4] 1 から 7 までの数を 1 つずつ書いた 7 個の玉が, 袋の中に入っている. 袋から玉を 1 個取り出し, 書かれている数を記録して袋に戻す. この試行を n 回繰り返して得られる n 個の数の和が 4 の倍数となる確率を p_n とする. ただし, n は正の整数とする. このとき, 次の問いに答えよ.
- (1) p_1 と p_2 を求めよ.
 - (2) p_{n+1} を p_n の式で表せ.
 - (3) p_n を求めよ.

5 次の問いに答えよ.

- (1) $\cos 15^\circ$ の値を求めよ.
- (2) 6400^{50} は何桁の整数か. ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする.
- (3) 平行四辺形 ABCD において, 辺 BC を 2 : 3 に内分する点を E とし, 対角線 BD と線分 AE の交点を P とする. $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ と表すとき, \overrightarrow{AP} を \vec{b} , \vec{d} を用いて表せ.

6 実数 $a > 1$ に対して, $f(x) = x^2 + 2x - a^2 + 2a$ とおく. 次の問いに答えよ.

- (1) 2 次方程式 $f(x) = 0$ の解を a を用いて表せ.
- (2) 放物線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = a$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しいとき, $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ を示し, このときの a の値を求めよ.

解答例

1 (1) $C: y = x^3 + x - 1$ より $y' = 3x^2 + 1$

C 上の点 $(t, t^3 + t - 1)$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 + t - 1) = (3t^2 + 1)(x - t)$$

よって $y = (3t^2 + 1)x - 2t^3 - 1$

(2) (1) で求めた接線が点 $(0, 1)$ を通るとき

$$1 = -2t^3 - 1 \quad \text{ゆえに} \quad (t+1)(t^2 - t + 1) = 0$$

t は実数であるから $t = -1$ これを (1) の結果に代入して

接点 $(-1, -3)$, 接線 $\ell: y = 4x + 1$

(3) C, ℓ の方程式より

$$4x + 1 - (x^3 + x - 2) = (x + 1)^2(2 - x) \quad \dots (*)$$

C と ℓ の共有点の x 座標は $x = -1, 2$

(*) より, $-1 \leq x \leq 2$ において, $4x + 1 \geq x^3 + x - 2$ に注意して

$$S = \int_{-1}^2 (x + 1)^2(2 - x) dx = \frac{1}{12} \{2 - (-1)\}^4 = \frac{27}{4}$$

補足 積分公式¹

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

2 $f(x) = \sqrt{ax} - \log x$ とおくと $f'(x) = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{ax} - 2}{2x}$

x	(0)	...	$\frac{4}{a}$...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	極小	↗

このとき極小値 $f\left(\frac{4}{a}\right) = 2 - \log \frac{4}{a} > 0$ であるから

$$2 > \log \frac{4}{a} \quad \text{ゆえに} \quad e^2 > \frac{4}{a} \quad \text{よって} \quad a > 4e^{-2}$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech.2010_kouki.pdf の 1 を参照.

3 (1) 与えられた漸化式から

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}a_1 + \sqrt{3}i = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}(-1) + \sqrt{3}i = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \\ a_3 &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}a_2 + \sqrt{3}i = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} + \sqrt{3}i = -1 + \sqrt{3}i \\ a_4 &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}a_3 + \sqrt{3}i = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}(-1 + \sqrt{3}i) + \sqrt{3}i = -1 \end{aligned}$$

(2) すべての自然数 m について,

$$a_{3m+1} = a_1, a_{3m+2} = a_2, a_{3m+3} = a_3 \quad \cdots (A)$$

が成立する.

[1] (1) の結果より, $a_4 = a_1$. さらに, 与えられた漸化式より

$$\begin{aligned} a_5 &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}a_4 + \sqrt{3}i = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}a_1 + \sqrt{3}i = a_2 \\ a_6 &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}a_5 + \sqrt{3}i = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}a_2 + \sqrt{3}i = a_3 \end{aligned}$$

したがって, $m = 1$ のとき, (A) が成立する.

[2] $m = k$ のとき, (A) が成立する, すなわち

$$a_{3k+1} = a_1, a_{3k+2} = a_2, a_{3k+3} = a_3$$

が成立すると仮定すると, 漸化式および (1) の結果により

$$\begin{aligned} a_{3k+4} &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}a_{3k+3} + \sqrt{3}i = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}a_3 + \sqrt{3}i = a_4 = a_1, \\ a_{3k+5} &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}a_{3k+4} + \sqrt{3}i = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}a_1 + \sqrt{3}i = a_2, \\ a_{3k+6} &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}a_{3k+5} + \sqrt{3}i = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}a_2 + \sqrt{3}i = a_3 \end{aligned}$$

したがって, $m = k + 1$ のときも (A) が成立する.

[1], [2] より, すべての自然数 m について, (A) が成立する.

(A) が成立することから, すべての正の整数 n について, 次が成立する.

$$a_{n+3} = a_n \quad (n \text{ は正の整数})$$

(3) (1) の結果から

$$a_1 a_2 a_3 = (-1) \cdot \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \cdot (-1 + \sqrt{3}i) = 2$$

$b_{n+1} = a_n b_n$ より, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = a_n$ であるから, これと (2) の結果より

$$\frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdot \frac{b_4}{b_3} = \frac{b_5}{b_4} \cdot \frac{b_6}{b_5} \cdot \frac{b_7}{b_6} = \dots = \frac{b_{3m-1}}{b_{3m-2}} \cdot \frac{b_{3m}}{b_{3m-1}} \cdot \frac{b_{3m+1}}{b_{3m}} = a_1 a_2 a_3 = 2$$

これらの積をとると

$$\left(\frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdot \frac{b_4}{b_3} \right) \left(\frac{b_5}{b_4} \cdot \frac{b_6}{b_5} \cdot \frac{b_7}{b_6} \right) \dots \left(\frac{b_{3m-1}}{b_{3m-2}} \cdot \frac{b_{3m}}{b_{3m-1}} \cdot \frac{b_{3m+1}}{b_{3m}} \right) = 2^m$$

したがって $\frac{b_{3m+1}}{b_1} = 2^m$ $b_1 = 1$ より $b_{3m+1} = 2^m \dots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$ は, $m = 0$ のときも成立するから, 次が成立する.

$$(*) \quad b_{3m-2} = 2^{m-1} \quad (m \text{ は自然数})$$

(*) および漸化式 $b_{n+1} = a_n b_n$ により

$$\begin{aligned} b_{3m-1} &= a_{3m-2} b_{3m-2} = a_1 b_{3m-2} \\ &= -1 \cdot 2^{m-1} = -2^{m-1}, \\ b_{3m} &= a_{3m-1} b_{3m-1} = a_2 b_{3m-1} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \cdot (-2^{m-1}) = -(1 + \sqrt{3}i) 2^{m-2} \end{aligned}$$

$$\text{よって } b_n = \begin{cases} 2^{m-1} & (n = 3m - 2) \\ -2^{m-1} & (n = 3m - 1) \\ -(1 + \sqrt{3}i) 2^{m-2} & (n = 3m) \end{cases}$$

$$\boxed{4} \quad (1) \quad p_1 = \frac{1}{7}$$

2回繰り返して得られる2個の数の和が4の倍数となるのは、次の13通り

1回目	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	7	7
2回目	3	7	2	6	1	5	4	3	7	2	6	1	5

$$\text{よって} \quad p_2 = \frac{13}{7^2} = \frac{13}{49}$$

(2) n 回繰り返して得られる n 個の数の和を4で割った余りが0, 1, 2, 3である確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n, s_n とすると

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{7}p_n + \frac{2}{7}q_n + \frac{2}{7}r_n + \frac{2}{7}s_n \\ &= \frac{1}{7}p_n + \frac{2}{7}(q_n + r_n + s_n) \end{aligned}$$

$p_n + q_n + r_n + s_n = 1$ であるから

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{7}p_n + \frac{2}{7}(1 - p_n) \\ &= -\frac{1}{7}p_n + \frac{2}{7} \end{aligned}$$

$$(3) \quad (2) \text{の結果から} \quad p_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{7} \left(p_n - \frac{1}{4} \right)$$

数列 $\left\{ p_n - \frac{1}{4} \right\}$ は、初項 $p_1 - \frac{1}{4}$, 公比 $-\frac{1}{7}$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{4} &= \left(p_1 - \frac{1}{4} \right) \left(-\frac{1}{7} \right)^{n-1} \\ p_n &= -\frac{3}{28} \left(-\frac{1}{7} \right)^{n-1} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{7} \right)^n + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

5 (1) 加法定理により

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

(2) $6400^{50} = (2^6 \cdot 10^2)^{50} = 2^{300} \cdot 10^{100}$ より

$$\begin{aligned}\log_{10} 6400^{50} &= \log_{10} 2^{300} \cdot 10^{100} \\ &= \log_{10} 2^{300} + \log_{10} 10^{100} = 300 \log_{10} 2 + 100 \\ &= 300 \times 0.3010 + 100 = 190.30\end{aligned}$$

$190 < \log_{10} 6400^{50} < 191$ であるから

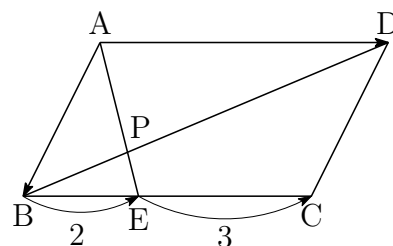
$$\log_{10} 10^{190} < \log_{10} 6400^{50} < \log_{10} 10^{191}$$

したがって $10^{190} < 6400^{50} < 10^{191}$ よって **191** 桁

(3) $BE : EC = 2 : 3$ より

$$\begin{aligned}\vec{AE} &= \vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{BC} = \vec{b} + \frac{2}{5}\vec{d} \\ &= \frac{5\vec{b} + 2\vec{d}}{5} = \frac{7}{5} \cdot \frac{5\vec{b} + 2\vec{d}}{7}\end{aligned}$$

よって $\vec{AP} = \frac{5\vec{b} + 2\vec{d}}{7}$



- 6 (1) $f(x) = x^2 + 2x - a^2 + 2a$ について, $f(x) = 0$ とおくと

$$x^2 + 2x - a^2 + 2a = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x+a)(x-a+2) = 0$$

よって $x = -a, a-2$

- (2) (1)の結果から, 右の図の斜線部分の面積を

$$S_1 = - \int_{-a}^{a-2} f(x) dx$$

$$S_2 = \int_{a-2}^a f(x) dx$$

とおくと, $S_1 = S_2$ より

$$- \int_{-a}^{a-2} f(x) dx = \int_{a-2}^a f(x) dx \quad \text{ゆえに} \quad \int_{-a}^{a-2} f(x) dx + \int_{a-2}^a f(x) dx = 0$$

よって $\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad \dots (*)$

$$\begin{aligned} (1) \text{の結果から} \quad f(x) &= (x+a)(x-a+2) \\ &= (x+a)\{(x+a) - 2(a-1)\} \\ &= (x+a)^2 - 2(a-1)(x+a) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^a \{(x+a)^2 - 2(a-1)(x+a)\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x+a)^3 - (a-1)(x+a)^2 \right]_{-a}^a \\ &= \frac{8}{3}a^3 - 4(a-1)a^2 \\ &= \frac{4}{3}a^2\{2a - 3(a-1)\} = \frac{4}{3}a^2(3-a) \end{aligned}$$

(*)であるから, $a > 1$ に注意して $a = 3$

