平成 31 年度　琉球大学２次試験後期日程 (数学問題)
理学部 (数理科学科)　平成 31 年 3 月 12 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ $x > -2$，$x \neq 0$ の範囲で，関数 $f(x)$ を $f(x) = \dfrac{1}{x} + \log(x+2)$ と定める．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の増減と極値を調べ，$y = f(x)$ のグラフをかけ．ただし，グラフの凹凸は調べなくてよい．

(3) k を実数とする．直線 $y = k$ と曲線 $y = f(x)$ の交点の個数を調べよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ m，n を自然数とし，$A(m,\ n) = \displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $A(m,\ 1)$ を m を用いて表せ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，関係式 $A(m,\ n) = \dfrac{n}{m+1}A(m+1,\ n-1)$ が成り立つことを示せ．

(3) (1)，(2) の結果を使って，$\mathrm{A}(m,\ n)$ を m，n を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ i を虚数単位とし，$a = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ とおく．また，$A = a + a^2 + a^4$，$B = a^3 + a^5 + a^6$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $A + B$ の値を求めよ．

(2) AB の値を求めよ．

(3) $\sin\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{4\pi}{7} + \sin\dfrac{8\pi}{7}$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 三角形 OAB において，$\mathrm{OA} = 5$，$\mathrm{OB} = 4$，$\mathrm{AB} = 6$ とし，線分 AB を $1:2$ に内分する点を C とおく．また，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\vec{c}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ．

(3) $\vec{c}$ の大きさを求めよ．

(4) 点 A から直線 OC におろした垂線の交点を H とおく．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．

正解

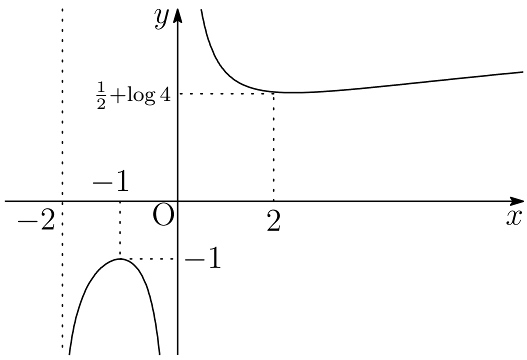
$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\log(x+2)$ より　$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x+2}=\boldsymbol{\dfrac{(x+1)(x-2)}{x^2(x+2)}}$

(2) (1) の結果から

x	(-2)	$\cdots$	-1	$\cdots$	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって　極大値 $f(-1)=\boldsymbol{-1}$，**極小値** $\boldsymbol{f(2)=\dfrac{1}{2}+\log 4}$

$\displaystyle\lim_{x\to-2+0}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$



(3) (2) の結果から　$\boldsymbol{k<-1,\ \dfrac{1}{2}+\log 4<k}$　**のとき　2 個**

$\boldsymbol{k=-1,\ \dfrac{1}{2}+\log 4}$　**のとき　1 個**

$\boldsymbol{-1<k<\dfrac{1}{2}+\log 4}$　**のとき　0 個**

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 定義式により

$$
\begin{aligned}
A(m,\ 1) &= \int_0^1 x^m(1-x)\,dx = \int_0^1 (x^m - x^{m+1})\,dx \\
&= \left[\ \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{x^{m+2}}{m+2}\ \right]_0^1 = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{(m+1)(m+2)}}
\end{aligned}
$$

(2) 部分積分法により

$$
\begin{aligned}
A(m,n) &= \int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \frac{1}{m+1}\int_0^1 (x^{m+1})'(1-x)^n\,dx \\
&= \left[\ \frac{1}{m+1}x^{m+1}(1-x)^n\ \right]_0^1 + \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\,dx \\
&= \frac{n}{m+1}A(m+1, n-1)
\end{aligned}
$$

(3) (1)，(2) の結果から

$$
\begin{aligned}
A(m,\ n) &= \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdots\frac{2}{m+n-1}A(m+n-1, 1) \\
&= \frac{m!n!}{(m+n-1)!}\cdot\frac{1}{(m+n)(m+n+1)} = \boldsymbol{\frac{m!n!}{(m+n+1)!}}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $a = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ より

$$a^7 = \left(\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}\right)^7 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$

ゆえに　$a^7 - 1 = (a-1)(1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6) = 0$

$a - 1 \neq 0$ であるから　$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 = 0$　$\cdots(*)$

$(*)$ により　$A + B = (a + a^2 + a^4) + (a^3 + a^5 + a^6)$

$$= a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 = \mathbf{-1}$$

(2) $a^7 = 1$ および $(*)$ により

$$\begin{aligned} AB &= (a + a^2 + a^4)(a^3 + a^5 + a^6) \\ &= a^4 + a^6 + a^7 + a^5 + a^7 + a^8 + a^7 + a^9 + a^{10} \\ &= 3 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 = \mathbf{2} \end{aligned}$$

(3) A，B を解とする 2 次方程式は，(1)，(2) の結果から

$$x^2 - (A+B)x + AB = 0 \quad \text{すなわち} \quad x^2 + x + 2 = 0$$

これを解いて　$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}\,i}{2}$

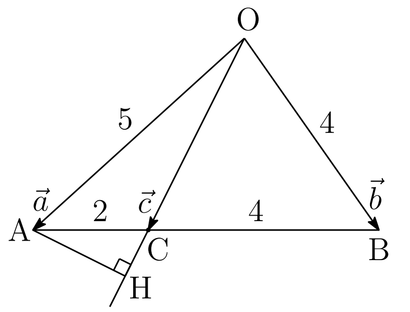
ここで　$\mathrm{Im}(A) = \sin\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{4\pi}{7} + \sin\dfrac{8\pi}{7}$

$$= \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} > 0$$

よって　$\sin\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{4\pi}{7} + \sin\dfrac{8\pi}{7} = \dfrac{\boldsymbol{\sqrt{7}}}{\mathbf{2}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 点Cは AB を 1 : 2 に内分する点であるから $\boldsymbol{\vec{c} = \dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}}$

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 6$ より，$|\vec{b}-\vec{a}| = 6$ であるから



$$|\vec{b}-\vec{a}|^2 = 6^2$$
$$|\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{a}|^2 = 36$$

$|\vec{b}| = 4$，$|\vec{a}| = 5$ であるから

$$16 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 25 = 36$$

これを解いて $\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{5}{2}}$

(3) (1) の結果から $|\vec{c}| = \dfrac{1}{3}|2\vec{a}+\vec{b}|$

$$\begin{aligned}|2\vec{a}+\vec{b}|^2 &= 4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2\\ &= 4\cdot5^2 + 4\cdot\frac{5}{2} + 4^2 = 126\end{aligned}$$

よって $|\vec{c}| = \dfrac{1}{3}\sqrt{126} = \boldsymbol{\sqrt{14}}$

(4) $\vec{e} = \dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (\vec{a}\cdot\vec{e})\vec{e} = \dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{c})}{|\vec{c}|^2}\vec{c}$

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = \frac{1}{3}\vec{a}\cdot(2\vec{a}+\vec{b}) = \frac{1}{3}(2|\vec{a}|^2 + \vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{1}{3}\left(2\cdot5^2 + \frac{5}{2}\right) = \frac{35}{2},$$
$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2} = \frac{1}{14}\cdot\frac{35}{2} = \frac{5}{4}$$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{5}{4}\vec{c} = \dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{1}{3}(2\vec{a}+\vec{b}) = \boldsymbol{\dfrac{5}{12}(2\vec{a}+\vec{b})}$