平成31年度　琉球大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・農・教育学部　平成31年2月25日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120分)
- 農・教育 (学校教育 [教育実践学・技術・特別支援]，生涯教育 [自然環境科学]) 学部は，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (60分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ a と b は定数で，$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x) = e^{ax}\sin(bx)$ と $g(x) = e^{ax}\cos(bx)$ について，$af(x) - bg(x)$ と $bf(x) + ag(x)$ を微分せよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int e^{ax}\sin(bx)\,dx$ と $\displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$ を求めよ．

(3) 曲線 $y = e^{-x}\sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x^2}\ (x > 0)$ とする．$f(x)$ の最大値を与える x を a とする．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べることにより，a の値および最大値 $f(a)$ を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線が原点 $(0,\ 0)$ を通るとき，その接線の方程式を求めよ．

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = a$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

3 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = \sqrt{\frac{a_n}{a_{n+1}}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められるとき，次の問いに答えよ．

(1) $b_n = \log_2 a_n$ とする．b_{n+2} を b_{n+1}，b_n を用いて表せ．

(2) (1) で求めた関係式を次のように表すとき，定数 p，q を求めよ．

$$\begin{cases} b_{n+2} - pb_{n+1} = q(b_{n+1} - pb_n) \\ b_{n+2} - qb_{n+1} = p(b_{n+1} - qb_n) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ただし，$p \geqq q$ とする．

(3) (2) で求めた p，q を用いて数列 $\{c_n\}$，$\{d_n\}$ を次のように定める．

$$c_n = b_{n+1} - pb_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
$$d_n = b_{n+1} - qb_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

一般項 c_n，d_n をそれぞれ求めよ．

(4) 一般項 b_n および極限 $\lim_{n \to \infty} a_{2n}$，$\lim_{n \to \infty} a_{2n+1}$ を求めよ．

4 箱の中に赤玉 1 個と白玉 2 個が入っている．この箱から玉を 1 個取り出し，玉の色を見た上で箱に戻すという試行を n 回繰り返す．赤玉が連続して m 回以上出た確率を $P(n,\ m)$ とおく．ただし，$n \geqq m \geqq 2$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $P(2,\ 2)$，$P(3,\ 2)$，$P(4,\ 2)$ を求めよ．

(2) $P(m,\ m)$, $P(m+1,\ m)$, $P(m+2,\ m)$ を求めよ．

(3) $n = m+1,\ m+2,\ m+3, \cdots, 2m$ に対し $P(n,\ m) - P(n-1,\ m)$ を求めよ．

(4) $P(2m,\ m)$ を求めよ．

5 次の問いに答えよ．

(1) 不定方程式 $21x - 10y = 1$ の整数解で，$0 \leqq x \leqq 1000$ を満たすものの個数を求めよ．

(2) 任意の自然数 n に対して，$n^5 - n$ は 30 で割り切れることを示せ．

(3) $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ のとき，方程式 $\cos(2\theta) + \sin\theta = 1$ を解け．

$\boxed{\mathbf{6}}$ a は正の実数とする．$y = 2ax^2 - (5a-1)x + 2a + 1$ で表される放物線を C とする．次の問いに答えよ．

(1) 放物線 C は a の値によらず，2 定点を通る．その 2 定点の座標をそれぞれ求めよ．

(2) 放物線 C と放物線 $y = x(1-x)$ がただ 1 つの共有点をもつとき，その共有点の座標と a の値を求めよ．

(3) (1) で求めた 2 定点を通る直線と放物線 C で囲まれる部分の面積を S とする．S の値を a を用いて表せ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=e^{ax}\sin bx$，$g(x)=e^{ax}\cos bx$ を微分すると

$$f'(x)=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx=af(x)+bg(x)$$
$$g'(x)=ae^{ax}\cos bx-be^{ax}\sin bx=-bf(x)+ag(x)$$

したがって
$$af'(x)-bg'(x)=(a^2+b^2)f(x)$$
$$bf'(x)+ag'(x)=(a^2+b^2)g(x)$$

よって
$$\boldsymbol{\{af(x)-bg(x)\}'=(a^2+b^2)e^{ax}\sin bx}$$
$$\boldsymbol{\{bf(x)+ag(x)\}'=(a^2+b^2)e^{ax}\cos bx}$$

(2) (1) の結果を利用して (以下，C は積分定数とする)

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\sin bx\,dx&=\frac{1}{a^2+b^2}\{af(x)-bg(x)\}+C\\&=\boldsymbol{\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C},\\ \int e^{ax}\cos bx\,dx&=\frac{1}{a^2+b^2}\{bf(x)+ag(x)\}+C\\&=\boldsymbol{\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx)+C}\end{aligned}$$

(3) 求める立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^{\pi}(e^{-x}\sin x)^2\,dx=\pi\int_0^{\pi}e^{-2x}\sin^2 x\,dx\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}e^{-2x}\,dx-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}e^{-2x}\cos 2x\,dx\qquad\cdots①\end{aligned}$$

ここで，(2) の結果の第 2 式に $a=-2$，$b=2$ を代入すると

$$\begin{aligned}\int e^{-2x}\cos 2x\,dx&=\frac{e^{-2x}}{(-2)^2+2^2}(2\sin 2x-2\cos 2x)+C\\&=\frac{e^{-2x}}{4}(\sin 2x-\cos 2x)+C\end{aligned}$$

上式を利用して，① を計算すると

$$\begin{aligned}V&=-\frac{\pi}{4}\Big[\,e^{-2x}\,\Big]_0^{\pi}-\frac{\pi}{2}\Big[\,\frac{e^{-2x}}{4}(\sin 2x-\cos 2x)\,\Big]_0^{\pi}\\&=\frac{\pi}{4}(1-e^{-2\pi})-\frac{\pi}{8}(1-e^{-2\pi})=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}(1-e^{-2\pi})}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ を微分すると $f'(x)=\dfrac{1-2\log x}{x^3}$ $\cdots(*)$

右の増減表により

$\boldsymbol{a=\sqrt{e}}$ のとき，最大値 $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\boldsymbol{e}}$

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

(2) $(*)$ より，曲線 $y=\dfrac{\log x}{x^2}$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-\frac{\log t}{t^2}=\frac{1-2\log t}{t^3}(x-t)\quad \text{ゆえに}\quad y=\frac{1-2\log t}{t^3}x+\frac{3\log t-1}{t^2}$$

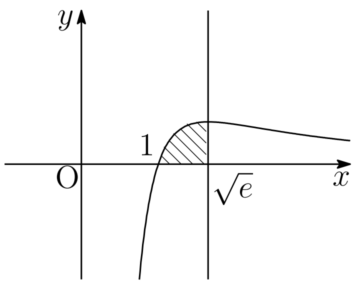
これが原点を通るから

$$\frac{3\log t-1}{t^2}=0\quad \text{これを解いて}\quad t=e^{\frac{1}{3}}$$

よって，求める接線の方程式は

$$y=\frac{1-2\log e^{\frac{1}{3}}}{(e^{\frac{1}{3}})^3}x\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=\frac{x}{3e}}$$

(3) 求める面積は，右の図の斜線部分でその面積を S とすると



$$\begin{aligned}S&=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\log x}{x^2}\,dx=-\int_1^{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{x}\right)'\log x\,dx\\&=-\left[\,\frac{\log x}{x}\,\right]_1^{\sqrt{e}}+\int_1^{\sqrt{e}}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx\\&=-\left[\,\frac{\log x+1}{x}\,\right]_1^{\sqrt{e}}=\mathbf{1}-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{e}}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = \sqrt{\frac{a_n}{a_{n+1}}} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

漸化式より $\log_2 a_{n+2} = \log_2 \sqrt{\frac{a_n}{a_{n+1}}} = \frac{1}{2}\log_2 a_n - \frac{1}{2}\log_2 a_{n+1}$

よって $\boldsymbol{b_{n+2} = -\frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n}$

(2) $$(*) \begin{cases} b_{n+2} - pb_{n+1} = q(b_{n+1} - pb_n) \\ b_{n+2} - qb_{n+1} = p(b_{n+1} - qb_n) \end{cases}$$

(1) の結果から $b_{n+2} + \frac{1}{2}b_{n+1} - \frac{1}{2}b_n = 0$

関係式 $(*)$ から $b_{n+2} - (p+q)b_{n+1} + pqb_n = 0$

上の 2 式から $p + q = -\frac{1}{2}$, $pq = -\frac{1}{2}$

p, q を解とする 2 次方程式は $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$

$p \geqq q$ に注意してこれを解くと $\boldsymbol{p = \frac{1}{2}}$, $\boldsymbol{q = -1}$

(3) $b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 1 = 0$，$b_2 = \log_2 a_2 = \log_2 2 = 1$

$$(**) \begin{cases} c_n = b_{n+1} - pb_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ d_n = b_{n+1} - qb_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

$(*)$，$(**)$ より $c_{n+1} = qc_n$，$d_{n+1} = pd_n$，$c_1 = d_1 = 1$

よって $c_n = c_1 \cdot q^{n-1} = \boldsymbol{(-1)^{n-1}}$，$d_n = d_1 \cdot p^{n-1} = \boldsymbol{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

(4) (3) の結果から $b_{n+1} - \frac{1}{2}b_n = (-1)^{n-1}$, $b_{n+1} + b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

上の 2 式から b_{n+1} を消去すると $\boldsymbol{b_n = \frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - (-1)^{n-1}\right\}}$

ゆえに $b_{2n} = \frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} + 1\right\}$，$b_{2n+1} = \frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - 1\right\}$

したがって $\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \frac{2}{3}$，$\lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = -\frac{2}{3}$

よって $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 2^{\frac{2}{3}}}$，$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 2^{-\frac{2}{3}}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 初めて連続して 2 回赤玉を取り出す事象を A_2 とする.
また,「∗」は赤玉または白玉を表すこととする.
2 回目で事象 A_2 が起こるのは「赤赤」の順に取り出す確率

$$P(2,\ 2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

3 回目で事象 A_2 が起こるのは「白赤赤」の順に取り出す確率

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

4 回目で事象 A_2 が起こるのは「∗白赤赤」の順に取り出す確率

$$1 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

$P(3,\ 2) = P(2,\ 2) + \dfrac{2}{27}$, $P(4,\ 2) = P(3,\ 2) + \dfrac{2}{27}$ であるから

$$P(2,\ 2) = \mathbf{\frac{1}{9}}, \quad P(3,\ 2) = \frac{1}{9} + \frac{2}{27} = \mathbf{\frac{5}{27}}, \quad P(4,\ 2) = \frac{5}{27} + \frac{2}{27} = \mathbf{\frac{7}{27}}$$

(2) 初めて連続して m 回赤玉を取り出す事象を A_m とする.

m 回目で事象 A_m が起こるのは「$\overbrace{\text{赤}\cdots\text{赤}}^{m\text{ 個}}$」の順に取り出す確率

$$P(m,\ m) = \left(\frac{1}{3}\right)^m = \frac{1}{3^m}$$

$m+1$ 回目で事象 A_m が起こるのは「白 $\overbrace{\text{赤}\cdots\text{赤}}^{m\text{ 個}}$」の順に取り出す確率

$$\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^m = \frac{2}{3^{m+1}}$$

$m+2$ 回目で事象 A_m が起こるのは「∗白 $\overbrace{\text{赤}\cdots\text{赤}}^{m\text{ 個}}$」の順に取り出す確率

$$\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^m = \frac{2}{3^{m+1}}$$

よって　$P(m,\ m) = \mathbf{\dfrac{1}{3^m}}$,

$$P(m+1,\ m) = P(m,\ m) + \frac{2}{3^{m+1}} = \mathbf{\frac{5}{3^{m+1}}},$$

$$P(m+2,\ m) = P(m+1,\ m) + \frac{2}{3^{m+1}} = \mathbf{\frac{7}{3^{m+1}}}$$

(3) n 回目で事象 A_m が起こるのは「$\overbrace{\ast\cdots\ast}^{n-m-1\text{ 個}}$ 白 $\overbrace{\text{赤}\cdots\text{赤}}^{m\text{ 個}}$」の順に取り出す確率

$$P(n,\ m)-P(n-1,\ m)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^m=\boldsymbol{\frac{2}{3^{m+1}}}$$

(4) (2)，(3) の結果から

$$\sum_{n=m+1}^{2m}\{P(n,\ m)-P(n-1,\ m)\}=\sum_{n=m+1}^{2m}\frac{2}{3^{m+1}}$$

$$P(2m,\ m)-P(m,\ m)=\frac{2m}{3^{m+1}}$$

よって　$P(2m,\ m)=P(m,\ m)+\dfrac{2m}{3^{m+1}}=\boldsymbol{\dfrac{2m+3}{3^{m+1}}}$

5 (1) $21x-10y=1$ より，$21\equiv 1,\ 10\equiv 0\pmod{10}$ であるから

$$x\equiv 1\pmod{10}$$

$x=1+10(n-1)$ とおくと (n は整数)，$x=10n-9$ より

$$0\leqq 10n-9\leqq 1000\quad\text{ゆえに}\quad 9\leqq 10n\leqq 1009$$

これを満たす整数 n は　$n=1,\ 2,\ 3,\cdots,\ 100$
よって，求める個数は　**100** (個)

(2)
$$\begin{aligned}n^5-n&=n(n^2+1)(n^2-1)\\&=n\{(n^2-4)+5\}(n^2-1)\\&=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+5(n-1)n(n+1)\end{aligned}$$

$(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ は連続する 5 整数の積で $5!$ の倍数．
$5(n-1)n(n+1)$ は $5\cdot 3!$ の倍数．よって，n^5-n は 30 で割り切れる．

(3) $\cos(2\theta)+\sin\theta=1$ より

$$1-2\sin^2\theta+\sin\theta=1\quad\text{ゆえに}\quad\sin\theta(2\sin\theta-1)=0$$

したがって　$\sin\theta=0,\ \dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ に注意して　$\boldsymbol{\theta=0^\circ,\ 30^\circ,\ 150^\circ,\ 180^\circ}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 放物線 $C : y = 2ax^2 - (5a-1)x + 2a + 1$ より

$$y = a(2x-1)(x-2) + x + 1$$

よって，C は 2 定点 $\left(\mathbf{\frac{1}{2}},\ \mathbf{\frac{3}{2}}\right)$，$\mathbf{(2,\ 3)}$ を通る．

(2) 放物線 C と放物線 $y = x(1-x) \cdots$ ① の方程式から y を消去すると

$$2ax^2 - (5a-1)x + 2a + 1 = x(1-x)$$

整理すると　$(2a+1)x^2 - 5ax + (2a+1) = 0 \quad \cdots$ ②

方程式 ② が重解をもつから，係数について

$$(-5a)^2 - 4(2a+1)(2a+1) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (9a+2)(a-2) = 0$$

$a > 0$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{a = 2}$

これを ② に代入して　$5x^2 - 10x + 5 = 0$　ゆえに　$x = 1$

これを ① に代入して　$y = 0$　よって，共有点の座標は　$\mathbf{(1,\ 0)}$

(3) (1) で求めた 2 点を通る直線は　$y = x + 1$

この直線と放物線 C で囲まれる部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \{(x+1) - (2ax^2 - (5a-1)x + 2a + 1)\}dx \\ &= -2a \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)\,dx \\ &= -\frac{-2a}{6}\left(2 - \frac{1}{2}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{9}{8}a} \end{aligned}$$