平成 30 年度　琉球大学２次試験後期日程 (数学問題)
理学部 (数理科学科)　平成 30 年 3 月 12 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{1}$ 1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD において，辺 AD の中点を E とする．辺 AB 上に点 P をとり，線分 AP の長さを x とおく．次の問いに答えよ．

(1) x を用いて $\tan\angle\mathrm{EPC}$ を表せ．

(2) 点 P が辺 AB 上を動くとき，$\tan\angle\mathrm{EPC}$ の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{2}$ 座標平面において，曲線 $y = e^x$ 上の 2 点 A，B を結ぶ線分の中点が $(0,\ 2)$ であるとする．このとき，直線 AB と曲線 $y = e^x$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{3}$ $f(x)$ は 4 次の整式で，x^4 の係数は 1 であるとする．次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x) = 0$ が 4 個の異なる実数解をもつとき，方程式 $f'(x) = 0$ は 3 個の異なる実数解をもつことを示せ．

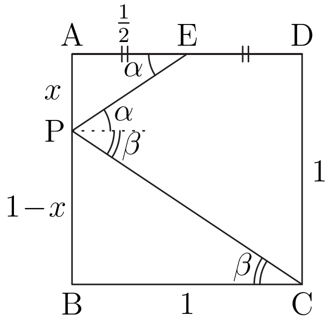
(2) $f(x)$ が $f'(0) = f''(0) = 0$ をみたすならば，方程式 $f'(x) = 0$ の異なる実数解の個数は 2 個以下であることを示せ．

(3) 方程式 $f(x) = 0$ が 3 重解をもち，$f'(0) = f''(0) = 0$ ならば，$f(0) = 0$ であることを示せ．

$\boxed{4}$ 不等式 $-1 \leqq x \leqq 1$，$-1 \leqq y \leqq 1$ が表す座標平面内の領域を D とする．原点 O を通る円 C を考える．円 C が D に含まれるという条件のもとで，C の中心 P が動く範囲を図示せよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\alpha=\angle\mathrm{PEA}$，$\beta=\angle\mathrm{PCB}$ とすると



$$\tan\alpha=2x,\quad \tan\beta=1-x$$

したがって

$$\tan\angle\mathrm{EPC}=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{2x+(1-x)}{1-2x(1-x)}=\boldsymbol{\frac{x+1}{2x^2-2x+1}}$$

(2) $f(x)=\dfrac{x+1}{2x^2-2x+1}$ $(0\leqq x\leqq 1)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1(2x^2-2x+1)-(x+1)(4x-2)}{(2x^2-2x+1)^2}=\frac{-2x^2-4x+3}{(2x^2-2x+1)^2}$$

このとき　$2x^2-2x+1=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}\neq 0$

$f'(x)=0$ を解くと　$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{10}}{2}$

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{10}-2}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	極大	$\searrow$	2

$c=\dfrac{\sqrt{10}-2}{2}$ とおくと　$-2c^2-4c+3=0$　ゆえに　$2c^2=3-4c$

$$f(c)=\frac{c+1}{2c^2-2c+1}=\frac{c+1}{(3-4c)-2c+1}=\frac{c+1}{4-6c}$$
$$=\frac{\frac{\sqrt{10}-2}{2}+1}{4-6\cdot\frac{\sqrt{10}-2}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2(10-3\sqrt{10})}=\frac{1}{2(\sqrt{10}-3)}=\frac{\sqrt{10}+3}{2}$$

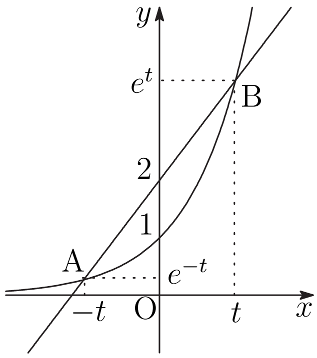
よって　$x=\dfrac{\sqrt{10}-2}{2}$ のとき 最大値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{10}+3}{2}}$，$x=0$ のとき 最小値 $\mathbf{1}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 2点A，Bのx座標をそれぞれ$-t$，tとおくと$(t>0)$，
2点$\mathrm{A}(-t,\ e^{-t})$，$\mathrm{B}(t,\ e^{t})$の中点のy座標から

$$\frac{e^t+e^{-t}}{2}=2 \quad \text{ゆえに} \quad e^t-e^{-t}=2\sqrt{3}$$

上の2式から　　$t=\log(2+\sqrt{3})$

直線ABとx軸，2直線$x=-t$，$x=t$で囲まれた部分の面積は



$$S_1=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})\cdot 2t=4t=4\log(2+\sqrt{3})$$

曲線$y=e^x$とx軸，2直線$x=-t$，$x=t$で囲まれた部分の面積は

$$S_2=\int_{-t}^{t}e^x\,dx=\Big[\ e^x\ \Big]_{-t}^{t}=e^t-e^{-t}=2\sqrt{3}$$

よって，求める面積は　$S_1-S_2=\mathbf{4\log(2+\sqrt{3})-2\sqrt{3}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 4 次方程式 $f(x) = 0$ の異なる 4 つの実数解を x_1，x_2，x_3，x_4 とすると $(x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = 0$$

ロルの定理 (平均値の定理) から

$$f'(c_i) = 0, \quad (x_i < c_i < x_{i+1})$$

となる c_i $(i = 1, 2, 3)$ が存在する．

よって，方程式 $f'(x) = 0$ は 3 個の異なる実数解をもつ．

(2) $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 12x^2 + 6ax + 2b \end{aligned}$$

$f'(0) = 0$ より $c = 0$，　$f''(0) = 0$ より $b = 0$

ゆえに　$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 = x^2(4x + 3a)$

上式から，$f'(x) = 0$ の解は　$x = 0, -\dfrac{3a}{4}$

$f'(x) = 0$ の異なる実数解の個数は，高々2 個，すなわち，2 個以下．

(3) $f(x) = 0$ の 3 重解を α とし，

$$f(x) = (x - \alpha)^3(x - \beta) \quad \cdots (*)$$

とおくと $(\alpha \neq \beta)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x - \alpha)^2(x - \beta) + (x - \alpha)^3 \\ f''(x) &= 6(x - \alpha)(x - \beta) + 6(x - \alpha)^2 \end{aligned}$$

上の第 2 式から　　$3(x - \alpha)(x - \beta) = \dfrac{1}{2}f''(x) - 3(x - \alpha)^2$

これを第 1 式に代入すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x - \alpha)\left\{\frac{1}{2}f''(x) - 3(x - \alpha)^2\right\} + (x - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{2}(x - \alpha)f''(x) - 2(x - \alpha)^3 \end{aligned}$$

上式に $x = 0$ を代入すると，$f'(0) = f''(0) = 0$ より

$$-2\alpha^3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = 0$$

これを $(*)$ に代入すると　$f(x) = x^3(x - \beta)$　　よって　$f(0) = 0$

$\boxed{\mathbf{4}}$ D 内にある領域 $y \geqq x$, $y \geqq -x$ が条件をみたすとき，P の境界線の方程式は

$$\sqrt{x^2+y^2} = 1-y \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{1}{2}(1-x^2)$$

これと $y=x$ および $y=-x$ との交点の x 座標はそれぞれ　$x = \sqrt{2}-1,\ 1-\sqrt{2}$
ゆえに，このときの P の境界線は

$$y = \frac{1}{2}(1-x^2) \quad (1-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}-1)$$

対称性に注意すると，P の境界線は

$$y = \frac{1}{2}(1-x^2) \quad (1-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}-1)$$
$$y = \frac{1}{2}(x^2-1) \quad (1-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}-1)$$
$$x = \frac{1}{2}(1-y^2) \quad (1-\sqrt{2} \leqq y \leqq \sqrt{2}-1)$$
$$x = \frac{1}{2}(y^2-1) \quad (1-\sqrt{2} \leqq y \leqq \sqrt{2}-1)$$

よって，点 P はこれらの境界線の内部の領域で境界線を含む.