平成30年度　琉球大学2次試験前期日程(数学問題)
理・工・医・農・教育学部　平成30年2月25日

- 理・工・医・教育[数学]学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B (120分)
- 農・教育(学校教育[教育実践学・技術・特別支援]，生涯教育[自然環境科学])学部は，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数I・II・A・B (60分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ a を正の実数とする．関数 $f(x)=-x^2+4x$ と $g(x)=2|x-a|$ について，次の問いに答えよ．

(1) $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共有点が1点となるような a の値を求めよ．

(2) (1)で求めた a の値のときに，$y=f(x)$ のグラフ，$y=g(x)$ のグラフおよび x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが異なる2点で交わるような a の値の範囲と，2つの交点の x 座標を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $n=1,2,3,\cdots$ に対して，$a_n=n^2+n+1$ とおく．さらに，実数 x_n，y_n を

$$(a_1+i)(a_2+i)(a_3+i)\cdots(a_n+i)=x_n+y_ni \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

によって定める．ただし i は虚数単位とする．次の問いに答えよ．

(1) x_2，y_2 および x_3，y_3 を求めよ．

(2) 自然数 n に対して，$\dfrac{y_n}{x_n}=\dfrac{n}{n+2}$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $y=e^{\sin x+\cos x}$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$ の増減，極値，凹凸を調べ，そのグラフをかけ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 2つの箱A，Bがあり，どちらの箱にも赤玉と白玉が1個ずつ入っている．それぞれの箱から，無作為に玉を1個取り出し，取り出した玉を交換して箱に戻す操作を繰り返す．n 回の操作の後，箱A，Bのどちらにも赤玉，白玉が1個ずつ入っている確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1) p_1，p_2 を求めよ．

(2) p_n を用いて p_{n+1} を表せ．

(3) 自然数 n に対して，p_n を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問いに答えよ.

(1) 今日は日曜日で，10 日後は水曜日である．100 日後および 100 万日後はそれぞれ何曜日か，理由とともに答えよ.

(2) x の方程式 $\log_2(x-1) - \log_{\frac{1}{2}}(x-4) = 1$ を解け.

(3) 三角形 OAB で，辺 OA を $2:1$ に内分する点を L，辺 OB の中点を M，辺 AB を $2:3$ に内分する点を N とする．線分 LM と ON の交点を P とする．$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ.

$\boxed{\mathbf{6}}$ 関数 $f(x) = x|x-3|\ (0 \leqq x \leqq 4)$ について，次の問いに答えよ.

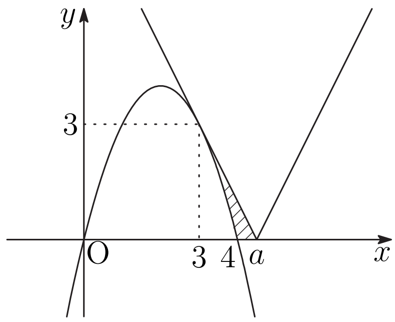
(1) $y = f(x)$ のグラフをかけ.

(2) 微分係数 $f'(2)$ の値を求めよ.

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$ の値を求めよ.

正解

$\boxed{1}$ (1) $a > 0$ より，$y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点が 1 点となるのは，2 次方程式



$$-x^2 + 4x = -2(x - a)$$

すなわち　$x^2 - 6x + 2a = 0$

が重解をもつときであるから，係数について

$$D/4 = (-3)^2 - 1 \cdot 2a = 0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = \dfrac{9}{2}}$

(2) 求める面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - 3\right) \cdot 3 - \int_3^4 (-x^2 + 4x)\,dx$$
$$= \frac{9}{4} - \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_3^4 = \boldsymbol{\frac{7}{12}}$$

(3) (1) の図から，$y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフが異なる 2 点で交わるような a の値の範囲は

$$\boldsymbol{0 < a < \frac{9}{2}}$$

また，そのときの交点の座標は

(i) $0 < a \leqq 4$ のとき

$$-x^2 + 4x = 2|x - a|$$

$0 < x \leqq 4$ に注意して，これを解くと

$$\boldsymbol{x = 3 - \sqrt{9 - 2a},\ 1 + \sqrt{1 + 2a}}$$

(ii) $4 < a < \dfrac{9}{2}$ のとき

$$-x^2 + 4x = -2x + 2a$$

これを解くと　　$\boldsymbol{x = 3 \pm \sqrt{9 - 2a}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_n = n^2 + n + 1$ より，$a_1 = 3,\ a_2 = 7,\ a_3 = 13$ であるから，定義式より

$$\begin{aligned} x_2 + y_2 i &= (a_1 + i)(a_2 + i) = (3 + i)(7 + i) = 20 + 10i, \\ x_3 + y_3 i &= (a_1 + i)(a_2 + i)(a_3 + i) \\ &= (20 + 10i)(13 + i) = 250 + 150i \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{x_2 = 20,\ y_2 = 10,\ x_3 = 250,\ y_3 = 150}$

(2)
$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{n}{n+2} \quad \cdots (\mathrm{A})$$

［1］$n = 1$ のとき　$x_1 + y_1 i = a_1 + i = 3 + i$

$x_1 = 3,\ y_1 = 1$ であるから，(A) は成立する．

［2］$n = k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} x_{k+1} + y_{k+1} i &= (a_{k+1} + i)(x_k + y_k i) \\ &= (a_{k+1}x_k - y_k) + (x_k + a_{k+1}y_k)i \end{aligned}$$

$x_{k+1} = a_{k+1}x_k - y_k,\ y_{k+1} = x_k + a_{k+1}y_k$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{y_{k+1}}{x_{k+1}} &= \frac{x_k + a_{k+1}y_k}{a_{k+1}x_k - y_k} = \frac{1 + a_{k+1}\cdot\dfrac{y_k}{x_k}}{a_{k+1} - \dfrac{y_k}{x_k}} \\ &= \frac{1 + (k^2 + 3k + 3)\cdot\dfrac{k}{k+2}}{k^2 + 3k + 3 - \dfrac{k}{k+2}} = \frac{k + 2 + (k^2 + 3k + 3)k}{(k+2)(k^2 + 3k + 3) - k} \\ &= \frac{k^3 + 3k^2 + 4k + 2}{k^3 + 5k^2 + 8k + 6} = \frac{(k+1)(k^2 + 2k + 2)}{(k+3)(k^2 + 2k + 2)} = \frac{k+1}{k+3} \end{aligned}$$

よって，$n = k + 1$ のときも (A) は成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，(A) は成立する．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$t'=\dfrac{dt}{dx}$，$t''=\dfrac{d^2t}{dx^2}$ とおくと，$y=e^t$ より

$$\frac{dy}{dx}=t'e^t,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\{t''+(t')^2\}e^t$$

このとき　$t'=\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$t''=-\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

したがって　$t''=-t$，$(t')^2=2-t^2$

ゆえに　$t''+(t')^2=-t+2-t^2=-(t+2)(t-1)\quad(-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2})$

$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ の符号は，それぞれ t'，$-(t-1)$ の符号と一致する．

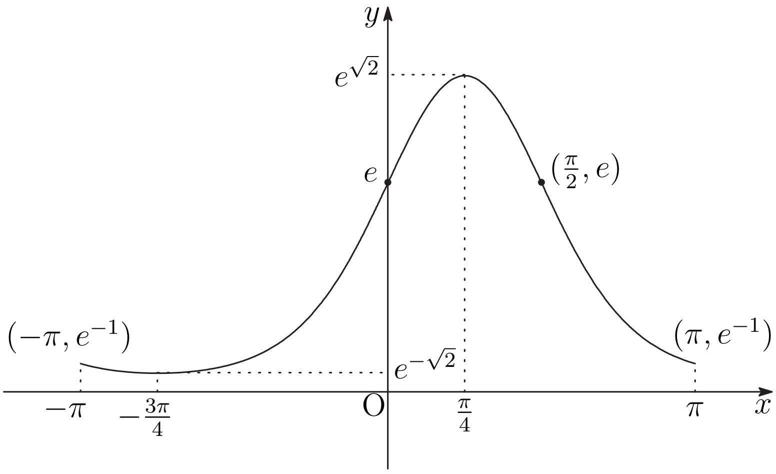
したがって，$y=e^{\sin x+\cos x}$ の増減・凹凸は次のようになる．

x	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\frac{dy}{dx}$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\frac{d^2y}{dx^2}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y	e^{-1}	↘	$e^{-\sqrt{2}}$	↗	e	↗	$e^{\sqrt{2}}$	↘	e	↘	e^{-1}

よって　極小値 $f\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)=\boldsymbol{e^{-\sqrt{2}}}$，極大値 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\boldsymbol{e^{\sqrt{2}}}$

変曲点は　$\mathbf{(0,\ e)}$，$\left(\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2},\ e}\right)$

以上の結果から，グラフの概形は次のようになる．



補足 $t=\sin x+\cos x\ (-\pi\leqq x\leqq\pi)$ が $x=-\dfrac{3\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{4}$ でそれぞれ極小，極大となるから，$y=e^{\sin x+\cos x}$ も $x=-\dfrac{3\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{4}$ でそれぞれ極小値，極大値をとる．

これを元にグラフの増減・凹凸を考えるとよい．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 箱 A に違う色の玉が入っているとき，1 回の操作の後，箱 A に違う色の玉が入る確率は，A，B 両方の箱から同じ色の玉を交換する確率であるから

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

箱 A に違う色の玉が入っているとき，1 回の操作の後，箱 A に同じ色の玉が入る確率は，この余事象の確率であるから

$$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

また，箱 A に同じ色の玉が入っているとき，1 回の操作の後には箱 A に違う色の玉が入る．

p_n は n 回の操作の後，箱 A に違う色の玉が入っている確率と考えてもよい．また，n 回の操作の後，箱 A に同じ色の玉が入っている確率を q_n とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$\boldsymbol{p_1=\frac{1}{2}},\quad q_1=\frac{1}{2},\quad (*)\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_n+q_n \\ q_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_n \end{cases}$$

よって　$p_2=\dfrac{1}{2}p_1+q_1=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

(2) $p_n+q_n=1$ であるから，これと $(*)$ の第 1 式から q_n を消去すると

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+(1-p_n)\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{p_{n+1}=-\frac{1}{2}p_n+1}$$

(3) (1)，(2) の結果から　$p_1=\dfrac{1}{2}$，$p_{n+1}=-\dfrac{1}{2}p_n+1\quad (n=1,2,3,\cdots)$

したがって　$p_{n+1}-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(p_n-\dfrac{2}{3}\right)$

数列 $\left\{p_n-\dfrac{2}{3}\right\}$ は，初項 $p_1-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{6}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$p_n-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{p_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

$\boxed{5}$ (1) 整数を 7 で割った余りと曜日を次のように対応できる．

0	1	2	3	4	5	6
日	月	火	水	木	金	土

したがって　$100 \equiv 2 \pmod{7}$

$$100^3 \equiv 2^3 \equiv 1 \pmod{7}$$

よって，100 日後は **火曜日**，100 万日後は **月曜日**

(2) 真数は正であるから

$$x-1>0 \text{ かつ } x-4>0 \quad \text{すなわち} \quad x>4 \quad \cdots ①$$

$\log_{\frac{1}{2}}(x-4) = \dfrac{\log_2(x-4)}{\log_2\frac{1}{2}} = -\log_2(x-4)$ より，与えられた方程式は

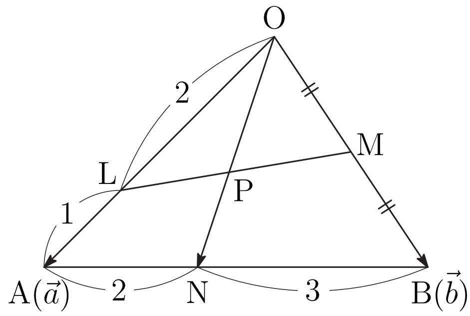
$$\log_2(x-1)+\log_2(x-4)=1$$

$$\log_2(x-1)(x-4)=\log_2 2$$

したがって　$(x-1)(x-4)=2$　ゆえに　$x^2-5x+2=0$

① に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{x = \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}}$

(3) 点 N は辺 AB を 2 : 3 に内分する点であるから



$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}}$$

$\vec{a} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OL}}$，$\vec{b} = 2\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を上式に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{3\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OL}} + 2\cdot 2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{5}$$

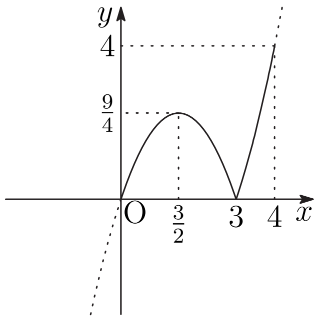
$$= \frac{17}{10}\cdot\frac{9\overrightarrow{\mathrm{OL}}+8\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{17} = \frac{17}{10}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{10}{17}\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \dfrac{10}{17}\cdot\dfrac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5} = \boldsymbol{\dfrac{6\vec{a}+4\vec{b}}{17}}$

6 (1) $f(x)=x|x-3|\ (0 \leqq x \leqq 4)$ より

$$f(x)=\begin{cases} -x(x-3) & (0 \leqq x \leqq 3) \\ x(x-3) & (3 \leqq x \leqq 4) \end{cases}$$

$-x(x-3)=-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$ より，$y=f(x)$ のグラフは，右の図のようになる．



(2) $0 \leqq x \leqq 3$ において，$f(x)=-x^2+3x$ より

$$f'(x)=-2x+3 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{f'(2)=-1}$$

(3) (1) で示したグラフから

$$\begin{aligned}\int_0^4 f(x)\,dx &= \int_0^3 (-x^2+3x)\,dx+\int_3^4 (x^2-3x)\,dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right]_3^4=\boldsymbol{\frac{19}{3}}\end{aligned}$$