平成29年度　琉球大学2次試験後期日程(数学問題)
理学部(数理科学科)　平成29年3月12日

- 数I・II・III・A・B (120分)

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)$ は等式

$$f'(x) = \sin x + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$$

を満たす．次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = A$，$f(0) = c$ とする．$f(x)$ を A と c を用いて表せ．

(2) $f(0) = 0$ のとき，$f(x)$ を求めよ．

$\boxed{2}$ A，B，C を x の整式とする．次の問いに答えよ．

(1) A を B で割った商を Q，余りを R とする．このとき，C が A と B の共通因数であるための必要条件は，C が B と R の共通因数であることを示せ．

(2) 次の整式 A と整式 B の共通因数のうち次数が最大のものを求めよ．

$$A = x^4 + 9x^3 + 6x^2 - 36x + 216$$
$$B = x^3 + 4x^2 - 15x + 42$$

$\boxed{3}$ 複素数 z は $|z| = 1$ を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) z の実部を x とする．$z^2 + \overline{z}^2$ を x を用いて表せ．ただし，$\overline{z}$ は z と共役な複素数とする．

(2) $\left|\dfrac{z}{2} + 2\overline{z} - 2\right|$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) 次の等式を証明せよ．

$$\left|\frac{z}{2} + 2\overline{z} + 2\right| + \left|\frac{z}{2} + 2\overline{z} - 2\right| = 5$$

$\boxed{4}$ 1個のさいころを投げて3以上の目が出たら5点，2以下の目が出たら2点得られるゲームを行う．次の問いに答えよ．

(1) さいころを2回投げて，合計点が7点になる確率を求めよ．

(2) さいころを3回投げて，合計点が偶数になる確率を求めよ．

(3) さいころを n 回投げて，合計点が偶数になる確率を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f'(x)=\sin x+A$ であるから

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt=c+\int_0^x(\sin t+A)\,dt$$
$$=c+\Big[-\cos t+At\Big]_0^x=\boldsymbol{-\cos x+Ax+c+1}$$

(2) $c=f(0)=0$ より，$f(x)=-\cos x+Ax+1$ であるから

$$A=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}(-\cos t+At+1)\,dt$$
$$=\Big[-\sin t+\frac{A}{2}t^2+t\Big]_{-\pi}^{\pi}=2\pi$$

よって　$\boldsymbol{f(x)=-\cos x+2\pi x+1}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) A と B の共通因数を $\gcd(A,B)$，B と R の共通因数を $\gcd(B,R)$ とする．条件から

$$A=BQ+R\quad\cdots①,\qquad R=A-BQ\quad\cdots②$$

① より，A は $\gcd(B,R)$ を因数にもつから，A と B は $\gcd(B,R)$ を因数にもつ．したがって，$\gcd(A,B)$ は $\gcd(B,R)$ を因数にもつ．

② より，R は $\gcd(A,B)$ を因数にもつから，B と R は $\gcd(A,B)$ を因数にもつ．したがって，$\gcd(B,R)$ は $\gcd(A,B)$ を因数にもつ．

よって　$\gcd(A,B)=\gcd(B,R)$

(2) $A=x^4+9x^3+6x^2-36x+216$，$B=x^3+4x^2-15x+42$ より

$$A=B(x+5)+x^2-3x+6,\quad B=(x^2-3x+6)(x+7)$$

A を B で割った余りを R とすると　$R=x^2-3x+6$

B は R で割り切れるから　$\gcd(B,R)=x^2-3x+6$

(1) の結果から　$\gcd(A,B)=\boldsymbol{x^2-3x+6}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $|z|=1$ より，$z\overline{z}=1$ であるから

$$\begin{aligned} z^2+\overline{z}^2 &= z^2+2z\overline{z}+\overline{z}^2-2 \\ &= (z+\overline{z})^2-2 = 4\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2-2 = \boldsymbol{4x^2-2} \end{aligned}$$

別解 $|z|=1$ より，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと，$x=\cos\theta$ であるから

$$\begin{aligned} z^2+\overline{z}^2 &= (\cos\theta+i\sin\theta)^2+(\cos\theta-i\sin\theta)^2 \\ &= 2\cos 2\theta = 2(2\cos^2\theta-1) = 2(2x^2-1) \end{aligned}$$

(2) $|z|=1$ より，$z\overline{z}=1$ であるから

$$\left|\frac{z}{2}+2\overline{z}-2\right| = \left|\frac{1}{2z}\left(z^2+4-4z\right)\right| = \frac{1}{2|z|}|(z-2)^2| = \frac{1}{2}|z-2|^2$$

よって，$z=-1$ で最大値 $\boldsymbol{\frac{9}{2}}$，$z=1$ で最小値 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(3) (2) の計算と同様にして

$$\left|\frac{z}{2}+2\overline{z}+2\right| = \left|\frac{1}{2z}\left(z^2+4+4z\right)\right| = \frac{1}{2|z|}|(z+2)^2| = \frac{1}{2}|z+2|^2$$

上式および (2) の計算により

$$\begin{aligned} \left|\frac{z}{2}+2\overline{z}+2\right|+\left|\frac{z}{2}+2\overline{z}-2\right| &= \frac{1}{2}|z+2|^2+\frac{1}{2}|z-2|^2 \\ &= \frac{1}{2}(z+2)(\overline{z}+2)+\frac{1}{2}(z-2)(\overline{z}-2) \\ &= |z|^2+4 = 5 \end{aligned}$$

補足 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{z}{2}+2\overline{z} &= \frac{5}{2}\cdot\frac{z+\overline{z}}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{z-\overline{z}}{2i}i \\ &= \frac{5}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}i\sin\theta \end{aligned}$$

$x=\frac{5}{2}\cos\theta$，$y=\frac{3}{2}\sin\theta$ とおくと，点 $x+yi$ は楕円

$$\frac{x^2}{\frac{25}{4}}+\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1$$

の点で，実軸上の 2 点 2, -2 は，楕円の焦点.

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 2 回投げて，3 以上の目と 2 以下の目が 1 回ずつ出る確率であるから

$$ {}_2\mathrm{C}_1 \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} = \mathbf{\frac{4}{9}} $$

(2) 3 回投げて，3 以上の目が 2 回，2 以下の目が 1 回出るか，または 3 回とも 2 以下の目が出る確率であるから

$$ {}_3\mathrm{C}_2 \left(\frac{4}{6}\right)^2 \frac{2}{6} + \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \mathbf{\frac{13}{27}} $$

(3) n 回投げ終えた時点で目の和が偶数である確率を p_n とすると

$$ p_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, $$
$$ p_{n+1} = \frac{2}{6}p_n + \frac{4}{6}(1-p_n) = -\frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3} $$

上の確率漸化式から $\quad p_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$

したがって，$\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ は初項が $p_1 - \frac{1}{2}$，公比が $-\frac{1}{3}$ の等比数列である．

よって

$$ p_n - \frac{1}{2} = \left(p_1 - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} $$
$$ p_n - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} $$
$$ p_n = \boldsymbol{\frac{1}{2}\left\{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}} $$