平成 29 年度　琉球大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・農・教育学部　平成 29 年 2 月 25 日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農・教育 (学校教育 [教育実践学・技術・特別支援]，生涯教育 [自然環境科学]) 学部は，$\boxed{5}$，$\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (60 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 \left(1-\frac{1}{x}\right)dx$ を求めよ．

(2) $t>0$ とする．座標平面上の点 $\mathrm{P}(\sqrt{t},\ \log t)$ と直線 $y=x$ との距離が最小になる t の値とそのときの距離を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，方程式 $2\sin\theta=\sin 3\theta$ を満たす θ の値を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 3\theta-2\sin\theta|\,d\theta$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ z を複素数とする．$z+\dfrac{3}{z}$ が実数であり，$3\leqq z+\dfrac{3}{z}\leqq 4$ となる z の動く範囲を複素数平面上に図示せよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 袋の中に赤玉 4 個と白玉 6 個が入っている．A が玉を 2 個取り出し，取り出した玉の色を確認して，もし 2 個とも赤玉なら赤玉 1 個を，それ以外の場合は白玉 1 個を袋に戻し，次に B がその袋から玉を 2 個取り出す．次の問いに答えよ．

(1) A が白玉 2 個を取り出し，かつ B が赤玉 2 個を取り出す確率を求めよ．

(2) B が赤玉 2 個を取り出す確率を求めよ．

(3) B が取り出した玉が赤玉 2 個であったとき，A が取り出した玉が白玉 2 個である条件付き確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $0\leqq a\leqq 1$ とし，$f(a)=\displaystyle\int_0^1 |x(a-x)|\,dx$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)\,dx$ を求めよ．

(2) $f(a)$ を a の関数として表せ．

(3) $f(a)$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの a の値をそれぞれ求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ a，bを正の実数とする．座標空間における4点O(0, 0, 0)，A(a, 0, 0)，B(0, b, 0)，C(0, 0, 1) を頂点とする四面体OABCを考える．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ の内積を求めよ．

(2) $\cos\angle\mathrm{ACB}$ と $\sin\angle\mathrm{ACB}$ を a，bを用いて表せ．

(3) 三角形ABCの面積を a，bを用いて表せ．

(4) 四面体OABCの体積が1であるとき，三角形ABCの面積の最小値とそのときの a と bの値を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\displaystyle\int_1^2 \left(1-\frac{1}{x}\right)dx = \Big[\ x-\log x\ \Big]_1^2 = \mathbf{1-\log 2}$

(2) 点 $\mathrm{P}(\sqrt{t},\ \log t)$ と直線 $y=x$ $(x-y=0)$ との距離を d とすると

$$d=\frac{|\sqrt{t}-\log t|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|\sqrt{t}-\log t|}{\sqrt{2}}$$

$f(t)=\sqrt{t}-\log t$ とおくと $\qquad f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}-\dfrac{1}{t}=\dfrac{\sqrt{t}-2}{2t}$

$f(t)$ の増減表は

t	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

$f(4)=2(1-\log 2)>0$ であるから，d は $\boldsymbol{t=4}$ のとき，最小値

$$\frac{|f(4)|}{\sqrt{2}}=\frac{2(1-\log 2)}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\sqrt{2}(1-\log 2)}$$

をとる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ より

$$\begin{aligned}2\sin\theta - \sin 3\theta &= 2\sin\theta - (3\sin\theta - 4\sin^3\theta)\\ &= \sin\theta(2\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1) \qquad \cdots①\end{aligned}$$

① より，方程式 $2\sin\theta = \sin 3\theta$ は

$$\sin\theta(2\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1) = 0$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ により，求める方程式の解は　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{6}}$

(2) ① より　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ のとき　$2\sin\theta - \sin 3\theta \leqq 0$

$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$2\sin\theta - \sin 3\theta \geqq 0$

したがって

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 3\theta - 2\sin\theta|\, d\theta\\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\sin\theta - \sin 3\theta)\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin\theta - \sin 3\theta)\, d\theta\\ &= -\left[-2\cos\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \left[-2\cos\theta + \frac{1}{3}\cos 3\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= -2\left(-2\cos\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{2}\right) + \left(-2\cos 0 + \frac{1}{3}\cos 0\right)\\ &\qquad\qquad + \left(-2\cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{3}{2}\pi\right)\\ &= \boldsymbol{2\sqrt{3} - \frac{5}{3}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと ($x,\ y$ は実数, $r > 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi$)

$$z + \frac{3}{z} = r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{3}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$
$$= \left(r + \frac{3}{r}\right)\cos\theta + \left(r - \frac{3}{r}\right)i\sin\theta \quad \cdots (*)$$

$(*)$ が実数のとき，$\left(r - \dfrac{3}{r}\right)\sin\theta = 0$ である．

(i) $r - \dfrac{3}{r} = 0$ のとき，$r = \sqrt{3}$ より，$z + \dfrac{3}{z} = 2\sqrt{3}\cos\theta$ であるから

$$3 \leqq 2\sqrt{3}\cos\theta \leqq 4 \quad \text{すなわち} \quad \cos\theta \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

また，$-\dfrac{1}{2} \leqq \sin\theta \leqq \dfrac{1}{2}$ であるから，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ より

$$x^2 + y^2 = 3, \quad x \geqq \frac{3}{2}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq y \leqq \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cdots (*)$$

(ii) $\sin\theta = 0$ のとき，z は実数であるから，$z = x$ より (x は実数)，

$$3 \leqq x + \frac{3}{x} \leqq 4$$

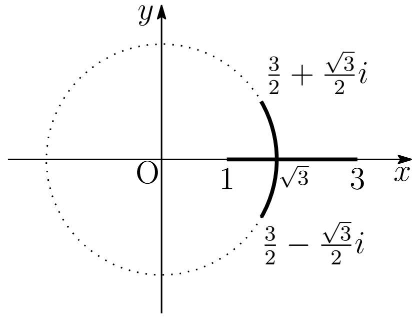
上式より，$x > 0$ であることに注意して

$$x^2 - 3x + 3 \geqq 0, \quad x^2 - 4x + 3 \leqq 0$$

したがって $\quad \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \geqq 0, \quad (x-1)(x-3) \leqq 0$

よって $\quad 1 \leqq x \leqq 3, \quad y = 0 \quad \cdots (**)$

$(*)$，$(**)$ より，z の動く範囲は



$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) A が赤玉 4 個と白玉 6 個の中から白玉 2 個を取り出し，次に B が赤玉 4 個と白玉 5 個の中から赤玉 2 個を取り出す確率であるから

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2} \times \frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \mathbf{\frac{1}{18}}$$

(2) (i) A が赤玉 4 個と白玉 6 個の中から赤玉 1 個と白玉 1 個を取り出し，次に B が赤玉 3 個と白玉 6 個の中から赤玉 2 個を取り出す確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1 \cdot {}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_2} \times \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} = \frac{8}{15} \times \frac{1}{12} = \frac{2}{45}$$

(ii) A が赤玉 4 個と白玉 6 個の中から赤玉 2 個を取り出し，次に B が赤玉 3 個と白玉 6 個の中から赤玉 2 個を取り出す確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2} \times \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2} = \frac{2}{15} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{90}$$

(1) の結果と (i),(ii) より，B が赤玉 2 個を取り出す確率は

$$\frac{1}{18} + \frac{2}{45} + \frac{1}{90} = \frac{5+4+1}{90} = \mathbf{\frac{1}{9}}$$

(3) (1),(2) の結果より，求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{9}} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

$\boxed{5}$ (1) $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)\,dx = \frac{1}{6}(1-0)^3 = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$

(2) $0 \leqq a \leqq 1$ であるから

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^1 |x(a-x)|\,dx \\ &= \int_0^a x(a-x)\,dx + \int_a^1 x(x-a)\,dx \\ &= \frac{1}{6}a^3 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{a}{2}x^2\right]_a^1 = \boldsymbol{\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から　　$f'(a) = a^2 - \dfrac{1}{2} = \left(a + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(a - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(4) $f(a)$ の増減表は

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	極小 $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$

よって　最大値 $\boldsymbol{f(0) = \dfrac{1}{3}}$，最小値 $\boldsymbol{f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{2-\sqrt{2}}{6}}$

$\boxed{6}$ (1) A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (a,\ 0, -1),\ \overrightarrow{\mathrm{CB}} = (0,\ b, -1)$$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}} = a\cdot 0 + 0\cdot b + (-1)\cdot(-1) = \mathbf{1}$

(2) $\cos\angle\mathrm{CAB} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}}}$

また　$\sin\angle\mathrm{CAB} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{(a^2+1)(b^2+1)}} = \boldsymbol{\sqrt{\dfrac{a^2b^2+a^2+b^2}{(a^2+1)(b^2+1)}}}$

(3) (2) の結果から

$$\sin\angle\mathrm{CAB} = \frac{\sqrt{a^2b^2+a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}} = \frac{\sqrt{a^2b^2+a^2+b^2}}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|}$$

よって　$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{CA}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|\sin\angle\mathrm{CAB} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2+b^2}}$

(4) C から $\triangle\mathrm{OAB}$ に下ろした垂線の長さが 1 であるから，四面体 OABC の体積から

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot 1 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ab = 1 \quad \text{すなわち} \quad ab = 6$$

したがって，(3) の結果から

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\sqrt{36 + a^2 + b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + (a-b)^2 + 2ab} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{48 + (a-b)^2}\end{aligned}$$

よって　　$a - b = 0$，すなわち，$\boldsymbol{a = b = \sqrt{6}}$ のとき，
$\triangle\mathrm{ABC}$ は最小値 $\boldsymbol{2\sqrt{3}}$ をとる．