平成 28 年度　琉球大学 2 次試験後期日程 (数学問題)
理学部 (数理科学科)　平成 28 年 3 月 12 日

問題 1 2 3 4 数 I・II・III・A・B (120 分)

1 次の問いに答えよ．

(1) 条件 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ かつ $x^2 + y^2 = 1$ のもとで，$u = x + y$ の値の範囲を求めよ．

(2) $u = x + y$，$v = xy$ とする．条件 $x^2 + y^2 = 1$ のもとで，u と v の満たす関係式を求めよ．

(3) 条件 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ かつ $x^2 + y^2 = 1$ のもとで，$z = x + y + 2xy$ の値の範囲を求めよ．

2 i を虚数単位とする．複素数 z が等式 $|z - i| = |2z + i|$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1) 複素数平面上で，この等式を満たす点 z 全体の表す図形を求めよ．

(2) $iz - 2 + i$ の偏角 θ の範囲を求めよ．ただし $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

3 次の問いに答えよ．

(1) 原点 $(0,\ 0)$ を通り，曲線 $y = \dfrac{\log x}{x^2}$ に接する直線の方程式を求めよ．

(2) 曲線 $y = \dfrac{\log x}{x^2}$ と (1) で求めた直線および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

4 10 進法表記で 1 から 2016 までの自然数の集合を M とする．次の問いに答えよ．

(1) 2 進法で表しても，3 進法で表しても，5 進法で表しても 1 の位が 0 となる M の元の個数はいくつか．

(2) 2 進法，3 進法，5 進法で表したとき，そのうち 2 つは 1 の位が 0 で，他の 1 つは 1 の位が 0 ではないような M の元の個数はいくつか．

(3) 2 進法，3 進法，5 進法で表したとき，そのうち 1 つのみ 1 の位が 0 で，他の 2 つは 1 の位が 0 でないような M の元の個数はいくつか．

解答例

1 (1) 条件 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ かつ $x^2+y^2=1$ より

$$x=\cos\theta,\quad y=\sin\theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと　$u=x+y=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$　$\cdots$①

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より，$\frac{\pi}{4} \leqq \theta+\frac{\pi}{4} \leqq \frac{3}{4}\pi$ であるから

$$\boldsymbol{1 \leqq u \leqq \sqrt{2}}$$

別解 $\vec{a}=(1,\ 1)$，$\vec{b}=(x,\ y)$ とし，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると，条件より

$$|\vec{b}|=\sqrt{x^2+y^2}=1,\quad 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$$

ゆえに　$u=x+y=\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\sqrt{2}\cos\theta$　　よって　$1 \leqq u \leqq \sqrt{2}$

(2) $x^2+y^2=1$ のとき，① より　　$-\sqrt{2} \leqq u \leqq \sqrt{2}$

$u=x+y$，$v=xy$ および条件 $x^2+y^2=1$ を

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$

に代入すると　$1=u^2-2v$　ゆえに　$v=\frac{u^2-1}{2}$　$\cdots$②

よって　　$\boldsymbol{v=\frac{u^2-1}{2}}$　$\boldsymbol{(-\sqrt{2} \leqq u \leqq \sqrt{2})}$

(3) 条件 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ かつ $x^2+y^2=1$ のとき，(1) の結果および ② より

$$v=\frac{u^2-1}{2} \quad (1 \leqq u \leqq \sqrt{2})$$

したがって　　$z=x+y+2xy=u+2v=u+2\cdot\frac{u^2-1}{2}$

$$=u^2+u-1=\left(u+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

z は，$u=1$ で最小，$u=\sqrt{2}$ で最大となるから

$$\boldsymbol{1 \leqq z \leqq \sqrt{2}+1}$$

■

2 (1) $|z-i|=|2z+i|$ より，$|z-i|^2=|2z+i|^2$ であるから

$$(z-i)(\overline{z}+i)=(2z+i)(2\overline{z}-i) \quad \text{整理すると} \quad z\overline{z}-iz+i\overline{z}=0$$

したがって　$(z+i)(\overline{z}-i)=1$　すなわち　$|z+i|^2=1$

これより　$|z+i|=1$　よって　**点 $-i$ を中心とする半径 1 の円**

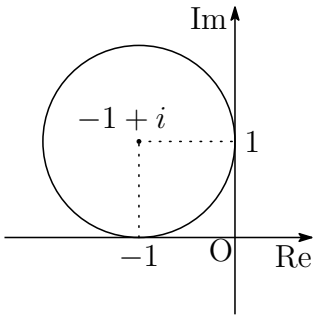
補足 $|z-i|=2|z+\frac{i}{2}|$ であるから，$|z-i|:|z+\frac{i}{2}|=2:1$ より，点 z は，2 点 i，$-\frac{i}{2}$ からの距離の比が $2:1$ である．2 点 i，$-\frac{i}{2}$ を $2:1$ に内分および外分する点は，それぞれ 0，$-2i$ で，点 z はこの 2 点を直径の両端とする円周上の点である (アポロニウスの円).

(2) $w=iz-2+i$ とおくと

$$w+1-i=i(z+i)$$

ゆえに　$|w+1-i|=|i(z+i)|=|z+i|$

(1) の結果から　$|w+1-i|=1$



w は点 $-1+i$ を中心とする半径 1 の円周上にあるから．求める偏角 θ の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi}$$

補足 iz は z を原点を中心に $\frac{\pi}{2}$ だけ回転したもので，$iz-2+i$ はこれをさらに $-2+i$ だけ平行移動したものである． ■

3 (1) $y=\dfrac{\log x}{x^2}=x^{-2}\log x$ より

$$y'=-2x^{-3}\log x+x^{-2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1-2\log x}{x^3}$$

曲線上の点 $\left(t,\ \dfrac{\log t}{t^2}\right)$ における接線の方程式は

$$y-\frac{\log t}{t^2}=\frac{1-2\log t}{t^3}(x-t)$$

これが原点を通るから

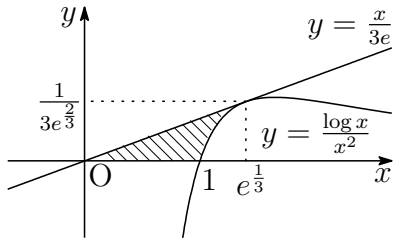
$$-\frac{\log t}{t^2}=-\frac{1-2\log t}{t^2} \quad \text{これを解いて} \quad t=e^{\frac{1}{3}}$$

よって，求める接線の方程式は

$$y=\frac{1-2\log e^{\frac{1}{3}}}{(e^{\frac{1}{3}})^3}x \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=\frac{x}{3e}}$$

(2) 接点の座標が $\left(e^{\frac{1}{3}},\ \frac{1}{3e^{\frac{2}{3}}}\right)$ であるから，接線と x 軸，直線 $x=e^{\frac{1}{3}}$ で囲まれた三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{3e^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{6e^{\frac{1}{3}}}$$



求める面積は，右の図の斜線部分であるから，その面積を S とすると

$$S=\frac{1}{6e^{\frac{1}{3}}}-\int_1^{e^{\frac{1}{3}}}\frac{\log x}{x^2}\,dx$$

ここで

$$\begin{aligned}-\int\frac{\log x}{x^2}\,dx&=\int\left(\frac{1}{x}\right)'\log x\,dx=\frac{\log x}{x}-\int\frac{1}{x}\cdot(\log x)'\,dx\\&=\frac{\log x}{x}-\int\frac{1}{x^2}\,dx=\frac{\log x+1}{x}+C\quad(C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

よって，求める面積は

$$S=\frac{1}{6e^{\frac{1}{3}}}+\left[\frac{\log x+1}{x}\right]_1^{e^{\frac{1}{3}}}=\boldsymbol{\frac{3}{2e^{\frac{1}{3}}}-1}$$

■

4 (1) M の部分集合を

$$\begin{aligned}A&=\{2\cdot1,\ 2\cdot2,\ 2\cdot3,\ \cdots,\ 2\cdot1008\}\\B&=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ \cdots,\ 3\cdot672\}\\C&=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ 5\cdot3,\ \cdots,\ 5\cdot403\}\end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned}A\cap B&=\{6\cdot1,\ 6\cdot2,6\cdot3,\ \cdots,\ 6\cdot336\}\\B\cap C&=\{15\cdot1,\ 15\cdot2,\ 15\cdot3,\ \cdots,\ 15\cdot134\}\\C\cap A&=\{10\cdot1,\ 10\cdot2,\ 10\cdot3,\ \cdots,\ 10\cdot201\}\\A\cap B\cap C&=\{30\cdot1,\ 30\cdot2,\ 30\cdot3,\ \cdots,\ 30\cdot67\}\end{aligned}$$

したがって　$n(A)=1008$，$n(B)=672$，$n(C)=403$，$n(A\cap B)=336$，
$n(B\cap C)=134$，$n(C\cap A)=201$，$n(A\cap B\cap C)=67$

よって，求める個数は　　$n(A\cap B\cap C)=\mathbf{67}$（個）

(2)
$$\begin{aligned} n(A\cap B\cap \overline{C}) &= n(A\cap B) - n(A\cap B\cap C) \\ n(B\cap C\cap \overline{A}) &= n(B\cap C) - n(A\cap B\cap C) \\ n(C\cap A\cap \overline{B}) &= n(C\cap A) - n(A\cap B\cap C) \end{aligned}$$

したがって，求める個数は

$$\begin{aligned} & n(A\cap B\cap \overline{C}) + n(B\cap C\cap \overline{A}) + n(C\cap A\cap \overline{B}) \\ =& n(A\cap B) + n(B\cap C) + n(C\cap A) - 3n(A\cap B\cap C) \\ =& 336 + 134 + 201 - 3\times 67 = \mathbf{470} \quad (\text{個}) \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} n(A\cup B\cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) \\ &\quad -n(A\cap B) - n(B\cap C) - n(C\cap A) \\ &\quad +n(A\cap B\cap C) \\ &= 1008 + 672 + 403 - 336 - 134 - 201 + 67 \\ &= 1479 \end{aligned}$$

これと (1)，(2) の結果から求める個数は

$$1479 - (470 + 67) = \mathbf{942} \quad (\text{個})$$

■