平成28年度　琉球大学2次試験後期日程 (数学問題)
理学部 (数理科学科)　平成28年3月12日

- 数I・II・III・A・B (120分)

1 次の問いに答えよ.

(1) 条件 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ かつ $x^2+y^2=1$ のもとで, $u=x+y$ の値の範囲を求めよ.

(2) $u=x+y$, $v=xy$ とする. 条件 $x^2+y^2=1$ のもとで, u と v の満たす関係式を求めよ.

(3) 条件 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ かつ $x^2+y^2=1$ のもとで, $z=x+y+2xy$ の値の範囲を求めよ.

2 i を虚数単位とする. 複素数 z が等式 $|z-i|=|2z+i|$ を満たすとき, 次の問いに答えよ.

(1) 複素数平面上で, この等式を満たす点 z 全体の表す図形を求めよ.

(2) $iz-2+i$ の偏角 θ の範囲を求めよ. ただし $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする.

3 次の問いに答えよ.

(1) 原点 $(0,\ 0)$ を通り, 曲線 $y=\dfrac{\log x}{x^2}$ に接する直線の方程式を求めよ.

(2) 曲線 $y=\dfrac{\log x}{x^2}$ と (1) で求めた直線および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

4 10進法表記で1から2016までの自然数の集合を M とする. 次の問いに答えよ.

(1) 2進法で表しても, 3進法で表しても, 5進法で表しても1の位が0となる M の元の個数はいくつか.

(2) 2進法, 3進法, 5進法で表したとき, そのうち2つは1の位が0で, 他の1つは1の位が0ではないような M の元の個数はいくつか.

(3) 2進法, 3進法, 5進法で表したとき, そのうち1つのみ1の位が0で, 他の2つは1の位が0でないような M の元の個数はいくつか.

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 条件 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ かつ $x^2+y^2=1$ より

$$x=\cos\theta,\quad y=\sin\theta \quad \left(0 \geqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと　$u=x+y=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$　$\cdots$①

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より，$\frac{\pi}{4} \leqq \theta+\frac{\pi}{4} \leqq \frac{3}{4}\pi$ であるから

$$\mathbf{1 \leqq u \leqq \sqrt{2}}$$

別解 $\vec{a}=(1,\ 1)$，$\vec{b}=(x,\ y)$ とし，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると，条件より

$$|\vec{b}|=\sqrt{x^2+y^2}=1,\quad 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$$

ゆえに　$u=x+y=\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\sqrt{2}\cos\theta$　　よって　$1 \leqq u \leqq \sqrt{2}$

(2) $x^2+y^2=1$ のとき，① より　　$-\sqrt{2} \leqq u \leqq \sqrt{2}$

$u=x+y$，$v=xy$ および条件 $x^2+y^2=1$ を

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$

に代入すると　$1=u^2-2v$　ゆえに　$v=\frac{u^2-1}{2}$　$\cdots$②

よって　　$\boldsymbol{v=\frac{u^2-1}{2}}$　$\mathbf{(-\sqrt{2} \leqq u \leqq \sqrt{2})}$

(3) 条件 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ かつ $x^2+y^2=1$ のとき，(1) の結果および ② より

$$v=\frac{u^2-1}{2} \quad (1 \leqq u \leqq \sqrt{2})$$

したがって　　$z=x+y+2xy=u+2v=u+2\cdot\frac{u^2-1}{2}$

$$=u^2+u-1=\left(u+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

z は，$u=1$ で最小，$u=\sqrt{2}$ で最大となるから

$$\mathbf{1 \leqq z \leqq \sqrt{2}+1}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $|z-i|=|2z+i|$ より，$|z-i|^2=|2z+i|^2$ であるから

$$(z-i)(\overline{z}+i)=(2z+i)(2\overline{z}-i) \quad \text{整理すると} \quad z\overline{z}-iz+i\overline{z}=0$$

したがって　$(z+i)(\overline{z}-i)=1$　すなわち　$|z+i|^2=1$

これより　$|z+i|=1$　よって　**点 $\boldsymbol{-i}$ を中心とする半径 1 の円**

補足 $|z-i|=2|z+\frac{i}{2}|$ であるから，$|z-i|:|z+\frac{i}{2}|=2:1$ より，点 z は，2 点 i，$-\frac{i}{2}$ からの距離の比が $2:1$ である．2 点 i，$-\frac{i}{2}$ を $2:1$ に内分および外分する点は，それぞれ 0，$-2i$ で，点 z はこの 2 点を直径の両端とする円周上の点である (アポロニウスの円).

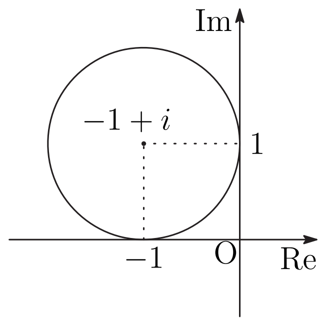
(2) $w=iz-2+i$ とおくと

$$w+1-i=i(z+i)$$

ゆえに　$|w+1-i|=|i(z+i)|=|z+i|$

(1) の結果から　　$|w+1-i|=1$

w は点 $-1+i$ を中心とする半径 1 の円周上にあるから．求める偏角 θ の範囲は



$$\boldsymbol{\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi}$$

補足 iz は z を原点を中心に $\frac{\pi}{2}$ だけ回転したもので，$iz-2+i$ はこれをさらに $-2+i$ だけ平行移動したものである．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y=\dfrac{\log x}{x^2}=x^{-2}\log x$ より

$$y'=-2x^{-3}\log x+x^{-2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1-2\log x}{x^3}$$

曲線上の点 $\left(t,\ \dfrac{\log t}{t^2}\right)$ における接線の方程式は

$$y-\frac{\log t}{t^2}=\frac{1-2\log t}{t^3}(x-t)$$

これが原点を通るから

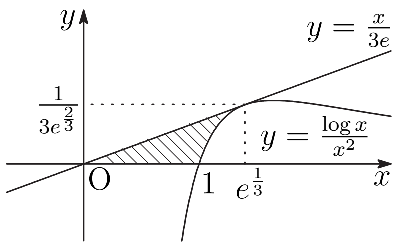
$$-\frac{\log t}{t^2}=-\frac{1-2\log t}{t^2} \quad \text{これを解いて} \quad t=e^{\frac{1}{3}}$$

よって，求める接線の方程式は

$$y=\frac{1-2\log e^{\frac{1}{3}}}{(e^{\frac{1}{3}})^3}x \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=\frac{x}{3e}}$$

(2) 接点の座標が $\left(e^{\frac{1}{3}},\ \frac{1}{3e^{\frac{2}{3}}}\right)$ であるから，接線と x 軸，直線 $x = e^{\frac{1}{3}}$ で囲まれた三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{3e^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{6e^{\frac{1}{3}}}$$



求める面積は，右の図の斜線部分であるから，その面積を S とすると

$$S = \frac{1}{6e^{\frac{1}{3}}} - \int_1^{e^{\frac{1}{3}}} \frac{\log x}{x^2}\,dx$$

ここで

$$\begin{aligned} -\int \frac{\log x}{x^2}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x}\right)' \log x\,dx = \frac{\log x}{x} - \int \frac{1}{x}\cdot(\log x)'\,dx \\ &= \frac{\log x}{x} - \int \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{\log x + 1}{x} + C \quad (C\text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

よって，求める面積は

$$S = \frac{1}{6e^{\frac{1}{3}}} + \left[\frac{\log x + 1}{x}\right]_1^{e^{\frac{1}{3}}} = \boldsymbol{\frac{3}{2e^{\frac{1}{3}}} - 1}$$

4 (1) M の部分集合を

$$\begin{aligned} A &= \{2\cdot1,\ 2\cdot2,\ 2\cdot3,\ \cdots,\ 2\cdot1008\} \\ B &= \{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ \cdots,\ 3\cdot672\} \\ C &= \{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ 5\cdot3,\ \cdots,\ 5\cdot403\} \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned} A\cap B &= \{6\cdot1,\ 6\cdot2, 6\cdot3,\ \cdots,\ 6\cdot336\} \\ B\cap C &= \{15\cdot1,\ 15\cdot2,\ 15\cdot3,\ \cdots,\ 15\cdot134\} \\ C\cap A &= \{10\cdot1,\ 10\cdot2,\ 10\cdot3,\ \cdots,\ 10\cdot201\} \\ A\cap B\cap C &= \{30\cdot1,\ 30\cdot2,\ 30\cdot3,\ \cdots,\ 30\cdot67\} \end{aligned}$$

したがって　$n(A) = 1008$，$n(B) = 672$，$n(C) = 403$，$n(A\cap B) = 336$，
$n(B\cap C) = 134$，$n(C\cap A) = 201$，$n(A\cap B\cap C) = 67$

よって，求める個数は　$n(A\cap B\cap C) = \mathbf{67}$ (個)

(2)
$$\begin{aligned} n(A\cap B\cap\overline{C}) &= n(A\cap B)-n(A\cap B\cap C)\\ n(B\cap C\cap\overline{A}) &= n(B\cap C)-n(A\cap B\cap C)\\ n(C\cap A\cap\overline{B}) &= n(C\cap A)-n(A\cap B\cap C) \end{aligned}$$

したがって，求める個数は

$$\begin{aligned} &n(A\cap B\cap\overline{C})+n(B\cap C\cap\overline{A})+n(C\cap A\cap\overline{B})\\ =&n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-3n(A\cap B\cap C)\\ =&336+134+201-3\times 67=\mathbf{470}\ \ (\text{個}) \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} n(A\cup B\cup C) &= n(A)+n(B)+n(C)\\ &\qquad -n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)\\ &\qquad\quad +n(A\cap B\cap C)\\ &= 1008+672+403-336-134-201+67\\ &= 1479 \end{aligned}$$

これと (1)，(2) の結果から求める個数は

$$1479-(470+67)=\mathbf{942}\ \ (\text{個})$$