# 平成 28 年度　琉球大学２次試験前期日程 (数学問題)
# 理・工・医・農・教育学部　平成 28 年 2 月 25 日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農・教育 (学校教育 [教育実践学・技術・特別支援]，生涯教育 [自然環境科学]) 学部は，$\boxed{5}$ , $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (60 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ $i$ を虚数単位とし，$z = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $z^5$ および $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ の値を求めよ．

(2) $t = z + \dfrac{1}{z}$ とおく．$t^2 + t$ の値を求めよ．

(3) $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ の値を求めよ．

(4) 半径 1 の円に内接する正五角形の 1 辺の長さの 2 乗を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 定積分 $\displaystyle\int_a^{a+1} |e^x - 1|\,dx$ の値を $I(a)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $-1 \leqq a \leqq 0$ のとき，$I(a)$ を $a$ で表せ．

(2) $a$ が実数全体を動くとき，$I(a)$ を最小にするような $a$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 自然数 $n$ に対して $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x}\,dx$ を求めよ．

(2) $x > 0$ のとき，不等式 $x - \dfrac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$ が成り立つことを示せ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x + \log(1+x)}\,dx$ を求めよ．

**4** $N$ を 3 以上の自然数とする．

1 から $N$ までの数字が 1 つずつ書かれた $N$ 枚のカードを袋に入れ，「無作為に 1 枚のカードを取り出し，そのカードを袋に戻さずに次のカードを取り出す」という作業を 3 枚のカードを取り出すまで繰り返す．取り出された 3 枚のカードに書かれた数の最大値を $X$ とする．

また，1 から $N$ までの数字が 1 つずつ書かれた $N$ 枚のカードを袋に入れ，「無作為に 1 枚のカードを取り出してはそれに書かれた数を記録し，袋に戻す」という作業を 3 回行い，記録された数の最大値を $Y$ とする．

$n$ を $N$ 以下の自然数とする．$X=n$ となる確率を $p_n$ とし，$Y=n$ となる確率を $q_n$ とする．

次の問いに答えよ．

(1) $p_3$，$q_1$，$q_2$，$q_3$ を求めよ．

(2) $p_n$ と $q_n$ を求めよ．

**5** 次の問いに答えよ．

(1) 整式 $P(x)$ は，$P\left(\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{8}{3}$ と $P\left(-\dfrac{7}{2}\right)=-\dfrac{5}{2}$ を満たす．
$P(x)$ を $6x^2+11x-35$ で割った余りを求めよ．

(2) 座標空間内の 3 点 A$(3,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 3,\ 0)$，C$(1,\ s,\ t)$ を頂点とする三角形 ABC の重心を G，原点を O とする．OG$\perp$AG，OG$\perp$AB となるときの $s$ と $t$ の値を求めよ．

(3) 変量 $x$ の値が $x_1$，$x_2$，$x_3$ のとき，その平均値を $\overline{x}$ とする．分散 $s^2$ を

$$\frac{1}{3}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2\}$$

で定義するとき，$s^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2$ となることを示せ．ただし $\overline{x^2}$ は ${x_1}^2$，${x_2}^2$，${x_3}^2$ の平均値を表す．

**6** 座標平面上の原点 O，P$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，Q$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ の 3 点を通る放物線 $y=ax^2+bx+c$ を $C_1$ とし，原点 O を中心とする半径 1 の円を $C_2$ とする．
次の問いに答えよ．

(1) $a$，$b$，$c$ の値を求めよ．

(2) 放物線 $C_1$ と線分 PQ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3) 放物線 $C_1$ と円 $C_2$ で囲まれた図形のうち，放物線 $C_1$ の上側の部分の面積を求めよ．

# 正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $z=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ より

$$z^5=\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=\mathbf{1}$$

$z^5-1=0$ より　　$(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

$z\neq 1$ であるから　　$z^4+z^3+z^2+z+1=\mathbf{0}$

(2) $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ を $z^2\neq 0$ で割ると

$$z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)=1$$

$t=z+\dfrac{1}{z}$ より　　$t^2+t=\mathbf{1}$

(3) $z=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$，$\dfrac{1}{z}=\cos\dfrac{2\pi}{5}-i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ であるから

$$t=z+\frac{1}{z}=2\cos\frac{2\pi}{5} \quad \text{ゆえに} \quad \cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}t$$

上式より，$t>0$ であることに注意して，$t^2+t=1$ を解くと

$$t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{よって} \quad \cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}t=\boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$$

(4) 正五角形の一辺の長さを $x$ とすると，中心角 $\dfrac{2\pi}{5}$，等しい 2 辺の長さが 1 の二等辺三角形に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} x^2 &= 1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cos\frac{2\pi}{5} \\ &= 2-2\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{4}=\boldsymbol{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=|e^x-1|$ とおくと

$$f(x)=\begin{cases} e^x-1 & (x \geqq 0) \\ -(e^x-1) & (x<0) \end{cases}$$

$-1 \leqq a \leqq 0$ のとき，$a \leqq 0 \leqq a+1$ であるから

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_a^{a+1} f(x)\,dx = -\int_a^0 (e^x-1)\,dx + \int_0^{a+1}(e^x-1)\,dx \\ &= -\Big[\ e^x-x\ \Big]_a^0 + \Big[\ e^x-x\ \Big]_0^{a+1} \\ &= (e^a-a)+(e^{a+1}-a-1)-2\cdot 1 \\ &= \boldsymbol{e^a+e^{a+1}-2a-3} \end{aligned}$$

(2) $a<-1$ のとき，$a<a+1<0$ であるから

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_a^{a+1} f(x)\,dx = -\int_a^{a+1}(e^x-1)\,dx \\ &= -\Big[\ e^x-x\ \Big]_a^{a+1} = e^a-e^{a+1}+1 \end{aligned}$$

$0<a$ のとき，$0<a<a+1$ であるから

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_a^{a+1} f(x)\,dx = \int_a^{a+1}(e^x-1)\,dx \\ &= \Big[\ e^x-x\ \Big]_a^{a+1} = -e^a+e^{a+1}-1 \end{aligned}$$

$a<-1$ のとき　$I'(a)=e^a-e^{a+1}=e^a(1-e)<0$

$0<a$ のとき　$I'(a)=-e^a+e^{a+1}=e^a(e-1)>0$

$-1 \leqq a \leqq 0$ のとき　$I'(a)=e^a+e^{a+1}-2=(e+1)\left(e^a-\frac{2}{e+1}\right)$

ここで　$\dfrac{2}{e+1}-\dfrac{1}{e}=\dfrac{e-1}{e(e+1)}>0,\quad 1-\dfrac{2}{e+1}=\dfrac{e-1}{e+1}>0$

ゆえに　$\dfrac{1}{e}<\dfrac{2}{e+1}<1$　すなわち　$-1<\log\dfrac{2}{e+1}<0$

したがって　$-1<a<\log\dfrac{2}{e+1}$ のとき　$I'(a)<0$

$\log\dfrac{2}{e+1}<a<0$ のとき　$I'(a)>0$

よって，$I(a)$ を最小にする $a$ の値は　$\boldsymbol{a=\log\dfrac{2}{e+1}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ \log x\ \Big]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} = \mathbf{log\,2}$

(2) $t>0$ のとき

$$1-\frac{1}{1+t}=\frac{t}{1+t}>0 \qquad ゆえに \qquad \frac{1}{1+t}<1$$

$$(1+t)(1-t)=1-t^2<1 \qquad ゆえに \qquad 1-t<\frac{1}{1+t}$$

したがって，$t>0$ のとき　$1-t<\dfrac{1}{1+t}<1$

$x>0$ のとき　$\displaystyle\int_0^x (1-t)\,dt<\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt<\int_0^x dt$

よって，$x>0$ のとき　$x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$

(3) (2) の結果から，$x>0$ のとき　$\dfrac{x(4-x)}{2}<x+\log(1+x)<2x$

とくに，$0<x<4$ のとき　$\dfrac{1}{2x}<\dfrac{1}{x+\log(1+x)}<\dfrac{2}{x(4-x)}$

自然数 $n$ について，$0<\dfrac{1}{n}<\dfrac{2}{n}<4$ であるから

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x}\,dx<\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x+\log(1+x)}\,dx<\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{2}{x(4-x)}\,dx \qquad \cdots(*)$$

(1) の結果に注意して

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{2}\log 2$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{2}{x(4-x)}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x}\,dx-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x-4}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{2}\Big[\ \log(4-x)\ \Big]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\\ &= \frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{2}\log\frac{4-\frac{1}{n}}{4-\frac{2}{n}}\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log\frac{4-\frac{1}{n}}{4-\frac{2}{n}}=0$ であるから，$(*)$ についてはさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}\frac{1}{x+\log(1+x)}=\mathbf{\frac{1}{2}\,log\,2}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $p_3$ は，$N$ 枚のカードから 3 枚取り出したとき (非復元抽出)，1，2，3 を取り出す確率であるから

$$p_3 = \frac{{}_3\mathrm{P}_3}{{}_N\mathrm{P}_3} = \boldsymbol{\frac{6}{N(N-1)(N-2)}}$$

$q_1$ は，$N$ 枚のカードから 3 枚取り出したとき (復元抽出)，すべて 1 だけの確率であるから

$$q_1 = \left(\frac{1}{N}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{1}{N^3}}$$

$q_2$ は，$N$ 枚のカードから 3 枚取り出したとき (復元抽出)，すべて 2 以下の確率からすべて 1 だけの確率を引いた確率であるから

$$q_2 = \left(\frac{2}{N}\right)^3 - \left(\frac{1}{N}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{7}{N^3}}$$

$q_3$ は，$N$ 枚のカードから 3 枚取り出したとき (復元抽出)，すべて 3 以下の確率からすべての 2 以下の確率を引いた確率であるから

$$q_3 = \left(\frac{3}{N}\right)^3 - \left(\frac{2}{N}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{19}{N^3}}$$

(2) $p_n$ は，$N$ 枚のカードから 3 枚取り出したとき (非復元抽出)，1 枚は $n$ で，残りの 2 枚が $n-1$ 以下の確率であるから

$$p_n = \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_2 \times 3!}{{}_N\mathrm{P}_3} = \boldsymbol{\frac{3(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}}$$

$q_n$ は，$N$ 枚のカードから 3 枚取り出したとき (復元抽出)，すべて $n$ 以下の確率からすべての $n-1$ 以下の確率を引いた確率であるから

$$q_n = \left(\frac{n}{N}\right)^3 - \left(\frac{n-1}{N}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{3n^2-3n+1}{N^3}}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $P(x)$ を $6x^2+11x-35$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

$$\begin{aligned}P(x) &= (6x^2+11x-35)Q(x)+ax+b\\ &= (3x-5)(2x+7)Q(x)+ax+b\end{aligned}$$

$P\left(\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{8}{3}$，$P\left(-\dfrac{7}{2}\right)=-\dfrac{5}{2}$ であるから

$$\frac{5}{3}a+b=\frac{8}{3},\quad -\frac{7}{2}a+b=-\frac{5}{2}$$

これを解いて　$a=b=1$　よって，求める余りは　$\boldsymbol{x+1}$

(2) A(3, 0, 0)，B(0, 3, 0)，C(1, $s$, $t$) より

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})=\left(\frac{4}{3},\ \frac{s}{3}+1,\ \frac{t}{3}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(-\frac{5}{3},\ \frac{s}{3}+1,\ \frac{t}{3}\right)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-3,\ 3,\ 0)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}}=0$ であるから

$$-\frac{20}{9}+\left(\frac{s}{3}+1\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2=0 \quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから

$$-4+3\left(\frac{s}{3}+1\right)=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{s=1}$$

$s=1$ を ① に代入すると

$$-\frac{20}{9}+\left(\frac{1}{3}+1\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{t=\pm 2}$$

(3) 分散 $s^2$ の定義により

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{1}{3}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2\}\\ &= \frac{1}{3}\{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2-2\overline{x}(x_1+x_2+x_3)+3\overline{x}^2\}\end{aligned}$$

$\overline{x}=\dfrac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$ より，$x_1+x_2+x_3=3\overline{x}$ であるから

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{1}{3}\{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2-2\overline{x}\cdot 3\overline{x}+3\overline{x}^2\}\\ &= \frac{1}{3}({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)-\overline{x}^2\\ &= \overline{x^2}-\overline{x}^2\end{aligned}$$

$\boxed{6}$ (1) $C_1$ は原点 O を通るから　　$\boldsymbol{c=0}$

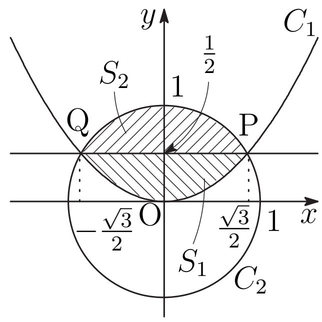
2 点 P，Q の $y$ 座標が等しいので，$C_1$ の軸は，線分 PQ の垂直二等分線であるから，$C_1$ は $y$ 軸に関して対称な放物線である．したがって

$$\boldsymbol{b=0}$$

さらに，$C_1 : y = ax^2$ が点 P を通ることから

$$\frac{1}{2} = a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = \frac{2}{3}}$$

(2) 求める部分の面積を $S_1$ とすると




$$\begin{aligned} S_1 &= 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}x^2\right) dx \\ &= 2\left[\frac{1}{2}x - \frac{2}{9}x^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}} \end{aligned}$$

(3) $C_2$ と直線 PQ で囲まれた図形のうち，線分 PQ の上側の部分の面積を $S_2$ とすると，$\angle \mathrm{POQ} = \dfrac{2\pi}{3}$ であるから

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{2\pi}{3} - \triangle \mathrm{POQ} \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot 1^2 \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

求める面積を $S$ とすると

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{12}}$$