平成 27 年度　琉球大学２次試験後期日程 (数学問題)
理学部 (数理科学科)　平成 27 年 3 月 12 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 15x$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ が極大値，極小値をもつように，a の値の範囲を求めよ．

(2) (1) の a の値の範囲において，$f(x)$ の極大値と極小値の和を a を用いて表せ．

(3) $f(x)$ の極大値と極小値の和が -18 のとき，a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $\cos 3x$，$\cos 4x$，$\cos 5x$ を $\cos x$ の式で表せ．

(2) $\cos\dfrac{\pi}{10}$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の問いに答えよ．

(1) x に関する方程式 $a\sin 2x = \sin x$ が $0 < x < \pi$ の範囲で解をもつように，a の値の範囲を求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で，2 つの曲線 $y = a\sin 2x$ と $y = \sin x$ で囲まれた部分の面積を a で表せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\log t}$ $(x > 1)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) 不等式 $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t} < f(x)$ を証明し，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ を示せ．

(3) $x > 1$ のとき，$\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\log t}$ を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 15x$ を微分すると

$$f'(x) = 3x^2 + 6ax + 15 = 3(x^2 + 2ax + 5)$$

方程式 $x^2 + 2ax + 5 = 0$ の判別式を D とすると，$D > 0$ であるから

$$D/4 = a^2 - 5 > 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a < -\sqrt{5},\ \sqrt{5} < a}$$

(2) $f(x)$ を $x^2 + 2ax + 5$ で割ることにより

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + 2ax + 5)(x + a) + (10 - 2a^2)x - 5a \\ &= \frac{1}{3}f'(x)(x + a) + (10 - 2a^2)x - 5a \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ の解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -2a$$

求める極値の和は，$f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ であることに注意して

$$\begin{aligned} f(\alpha) + f(\beta) &= (10 - 2a^2)(\alpha + \beta) - 10a \\ &= (10 - 2a^2)(-2a) - 10a \\ &= \boldsymbol{4a^3 - 30a} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から，このとき

$$4a^3 - 30a = -18 \quad \text{ゆえに} \quad (a + 3)(2a^2 - 6a + 3) = 0$$

(1) の結果に注意して　　$\boldsymbol{a = -3,\ \dfrac{3 + \sqrt{3}}{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$ に $\alpha=nx$，$\beta=x$ を代入すると

$$\cos(n+1)x+\cos(n-1)x=2\cos nx\cos x$$

したがって　$\cos(n+1)x=2\cos x\cos nx-\cos(n-1)x \quad \cdots(*)$

$(*)$ に $n=1,2,3,4$ を順次代入すると

$$\begin{aligned}
\cos 2x &= 2\cos^2 x-1,\\
\cos 3x &= 2\cos x\cos 2x-\cos x\\
&= 2\cos x(2\cos^2 x-1)-\cos x\\
&= \boldsymbol{4\cos^3 x-3\cos x},\\
\cos 4x &= 2\cos x\cos 3x-\cos 2x\\
&= 2\cos x(4\cos^3 x-3\cos x)-(2\cos^2 x-1)\\
&= \boldsymbol{8\cos^4 x-8\cos^2 x+1},\\
\cos 5x &= 2\cos x\cos 4x-\cos 3x\\
&= 2\cos x(8\cos^4 x-8\cos^2 x+1)-(4\cos^3 x-3\cos x)\\
&= \boldsymbol{16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x}
\end{aligned}$$

(2) $x=\dfrac{\pi}{10}$ のとき，$5x=\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$3x=\dfrac{\pi}{2}-2x$ より

$$\cos 3x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right) \quad \text{ゆえに} \quad 4\cos^3 x-3\cos x=2\sin x\cos x$$

$\cos x\neq 0$ であるから，整理すると　$4\sin^2 x+2\sin x-1=0$

$\sin x>0$ に注意してこれを解くと　$\sin x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

$\cos x>0$ であるから，$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$ より

$$\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $a\sin 2x=\sin x$ より，$a=0$ のとき，$0<x<\pi$ の範囲に解をもたない．
したがって，$a\neq 0$ に注意して方程式を変形すると

$$2a\sin x\cos x=\sin x \quad \text{ゆえに} \quad \sin x\left(\cos x-\frac{1}{2a}\right)=0$$

この方程式が $0<x<\pi$ の範囲に解をもつのは

$$-1<\frac{1}{2a}<1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a<-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<a}$$

(2) $f(x) = \sin x - a\sin 2x = \sin x(1 - 2a\cos x)$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ とおく．

(1) の結果から，$a < -\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2} < a$ のとき，$\cos\theta = \dfrac{1}{2a}$ とする．

$f(x)$ の原始関数の 1 つを

$$F(x) = \frac{a}{2}\cos 2x - \cos x$$

とおくと

$$\begin{aligned} F(0) &= \frac{a}{2} - 1, \qquad F(\pi) = \frac{a}{2} + 1, \\ F(\theta) &= \frac{a}{2}\cos 2\theta - \cos\theta = \frac{a}{2}(2\cos^2\theta - 1) - \cos\theta \\ &= \frac{a}{2}\left\{2\left(\frac{1}{2a}\right)^2 - 1\right\} - \frac{1}{2a} = -\frac{a}{2} - \frac{1}{4a} \end{aligned}$$

また，求める面積を S とすると

$$S = \int_0^{\pi} |f(x)|\,dx$$

(i) $-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，$f(x) \geqq 0$ より

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi} f(x)\,dx = \Big[\ F(x)\ \Big]_0^{\pi} \\ &= F(\pi) - F(0) = \left(\frac{a}{2} + 1\right) - \left(\frac{a}{2} - 1\right) = \mathbf{2} \end{aligned}$$

(ii) $a > \dfrac{1}{2}$ のとき，$f(x) \leqq 0$ $(0 \leqq x \leqq \theta)$，$f(x) \geqq 0$ $(\theta \leqq x \leqq \pi)$ より

$$\begin{aligned} S &= -\int_0^{\theta} f(x)\,dx + \int_{\theta}^{\pi} f(x)\,dx \\ &= F(0) + F(\pi) - 2F(\theta) \\ &= \left(\frac{a}{2} - 1\right) + \left(\frac{a}{2} + 1\right) - 2\left(-\frac{a}{2} - \frac{1}{4a}\right) = \boldsymbol{2a + \frac{1}{2a}} \end{aligned}$$

(iii) $a < -\dfrac{1}{2}$ のとき，$f(x) \geqq 0$ $(0 \leqq x \leqq \theta)$，$f(x) \leqq 0$ $(\theta \leqq x \leqq \pi)$ より

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\theta} f(x)\,dx - \int_{\theta}^{\pi} f(x)\,dx \\ &= -F(0) - F(\pi) + 2F(\theta) \\ &= -\{F(0) + F(\pi) - 2F(\theta)\} = \boldsymbol{-2a - \frac{1}{2a}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\log t}\ (x>1)$ を微分すると

$$f'(x)=\frac{1}{\log x^2}\cdot(x^2)'-\frac{1}{\log x}=\frac{2x}{2\log x}-\frac{1}{\log x}=\boldsymbol{\frac{x-1}{\log x}}$$

補足 $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}g(t)\,dt=g(\beta(x))\beta'(x)-g(\alpha(x))\alpha'(x)$

(2) $g(t)=t-\log t\ (t\geqq 1)$ とおくと

$$g'(t)=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}>0\quad(t>1)$$

$t>1$ のとき，$g(t)>g(1)=1>0$ であるから

$$t-\log t>0\quad \text{すなわち}\quad \frac{1}{t}<\frac{1}{\log t}\quad(t>1)$$

$x>1$ のとき，区間 $[x,\ x^2]$ において

$$\int_x^{x^2}\frac{dt}{t}<\int_x^{x^2}\frac{dt}{\log t}\quad\text{すなわち}\quad\int_x^{x^2}\frac{dt}{t}<f(x)$$

また　$\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{t}=\Big[\ \log t\ \Big]_x^{x^2}=\log x^2-\log x=\log x$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)>\lim_{x\to\infty}\int_x^{x^2}\frac{dt}{t}=\lim_{x\to\infty}\log x=\infty$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

(3) $x>1$ のとき

$$\begin{aligned}\int_x^{x^2}\frac{dt}{t\log t}&=\int_x^{x^2}\frac{(\log t)'}{\log t}\,dt=\Big[\ \log(\log t)\ \Big]_x^{x^2}\\&=\log(\log x^2)-\log(\log x)\\&=\log(2\log x)-\log(\log x)=\mathbf{\log 2}\end{aligned}$$