平成 27 年度　琉球大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・農・教育学部　平成 27 年 2 月 25 日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農・教育 (学校教育 [教育実践学・技術・特別支援]，生涯教育 [自然環境科学]) 学部は，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (60 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^t\,dt$ とするとき，$F(1)$ および $F'(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$，$g(x)$ が，

$$\begin{cases} f(x) + \displaystyle\int_0^x g(t)\,dt = 2\sin x - 3 \\ f'(x)g(x) = \cos^2 x \end{cases}$$

を満たすとき，$f(x)$，$g(x)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $f(x) = |\,x\,|\sqrt{1-x^2}\ (-1 \leqq x \leqq 1)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の増減を調べ，最大値，最小値を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 確率 $p\ (0 < p < 1)$ で「当たり」が出るくじを繰り返して引く．2 回目の「当たり」が出たときにこの試行を終える．$n \geqq 2$ として，n 回目でこの試行を終える確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1) p_2，p_3，p_4 を求めよ．

(2) p_n を求めよ．

(3) $N \geqq 2$ として，$\displaystyle\sum_{k=2}^{N} p_k$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ t を媒介変数として，$x = t + \dfrac{1}{t} + \dfrac{5}{2}$，$y = 2t - \dfrac{2}{t}$ で表される曲線を考える．次の問いに答えよ．

(1) t を消去して，x と y の関係式を求めよ．

(2) a を定数とするとき，直線 $y = ax + 5$ とこの曲線との共有点の個数を調べよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問いに答えよ.

(1) 3 次方程式 $x^3 - ax - 6 = 0$ が $x = -1$ を解にもつとき，定数 a の値と他の解を求めよ.

(2) $\log_2 \dfrac{1}{6} + \log_2 \dfrac{3}{4}$ の値を求めよ.

(3) 平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ \sqrt{3})$，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ をとる．$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の最大値と，そのときの θ の値を求めよ.

$\boxed{\mathbf{6}}$ 頂点が点 $\mathrm{A}(0,\ 4)$ で，点 $\mathrm{B}(2,\ 0)$ を通る放物線を考える．次の問いに答えよ.

(1) この放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ.

(2) この放物線上にあり，x 座標が $2a$ $(a > 0)$ である点を C とする．この放物線と x 軸との交点で，点 B と異なる点を D とする．点 C における放物線の接線 l_1 と点 D における放物線の接線 l_2 との交点 E の座標を，a を使って表せ.

(3) この放物線と直線 l_2，および点 E を通り y 軸に平行な直線で囲まれた部分の面積を求めよ.

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^t \, dt = \Big[\ e^t\ \Big]_x^{2x} = e^{2x} - e^x$

ゆえに　$\boldsymbol{F(1) = e^2 - e}$　また　$\boldsymbol{F'(x) = 2e^{2x} - e^x}$

(2) $$\begin{cases} f(x) + \displaystyle\int_0^x g(t)\,dt = 2\sin x - 3 & \cdots ① \\ f'(x)g(x) = \cos^2 x & \cdots ② \end{cases}$$

① の両辺を微分すると

$$f'(x) + g(x) = 2\cos x \quad \text{ゆえに} \quad f'(x) = 2\cos x - g(x)$$

上の第 2 式を ② に代入すると

$$\{2\cos x - g(x)\}g(x) = \cos^2 x \quad \text{整理すると} \quad \{g(x) - \cos x\}^2 = 0$$

よって　$\boldsymbol{g(x) = \cos x}$　これを ① に代入すると

$$f(x) + \int_0^x \cos t\,dt = 2\sin x - 3$$
$$f(x) + \Big[\ \sin t\ \Big]_0^x = 2\sin x - 3$$

したがって　$\boldsymbol{f(x) = \sin x - 3}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x) = |\,x\,|\sqrt{1-x^2}$ について

$$f(-x) = |-x|\sqrt{1-(-x)^2} = |\,x\,|\sqrt{1-x^2} = f(x)$$

したがって，$f(x)$ は偶関数である．

$x \geqq 0$ において，$f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ であるから

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \times \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f(x)$ の増減は，次のようになる．

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

よって　$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　**最大値** $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

$x = 0,\ \pm 1$ のとき　**最小値 0**

(2) $f(x)$ は偶関数であるから

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx &= 2\int_0^1 f(x)\,dx \\ &= 2\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= \left[\ -\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\ \right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $q = 1 - p$ とおくと

$$p_2 = pp = \boldsymbol{p^2}$$
$$p_3 = (pq + qp)p = 2p^2q = \boldsymbol{2p^2(1-p)}$$
$$p_4 = (pqq + qpq + qqp)p = 3p^2q^2 = \boldsymbol{3p^2(1-p)^2}$$

(2) (1) と同様にして

$$p_n = {}_{n-1}\mathrm{C}_1 pq^{n-2} \times p = (n-1)p^2q^{n-2} = \boldsymbol{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}$$

(3) $1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{N} x^{k-1} = \frac{1-x^N}{1-x}$ の両辺を x で微分すると

$$\sum_{k=2}^{N}(k-1)x^{k-2} = \frac{-Nx^{N-1}(1-x) - (1-x^N)(-1)}{(1-x)^2}$$

ゆえに $$\sum_{k=2}^{N}(k-1)(1-x)^2x^{k-2} = 1 - x^{N-1}\{N(1-x)+x\}$$

上式に $x = 1 - p$ を代入すると

$$\sum_{k=2}^{N}(k-1)p^2(1-p)^{k-2} = 1 - (1-p)^{N-1}(Np + 1 - p)$$

(2) の結果から

$$\sum_{k=2}^{N} p_k = \boldsymbol{1 - (1-p)^{N-1}(Np + 1 - p)}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $x = t + \dfrac{1}{t} + \dfrac{5}{2}$, $y = 2t - \dfrac{2}{t}$ から

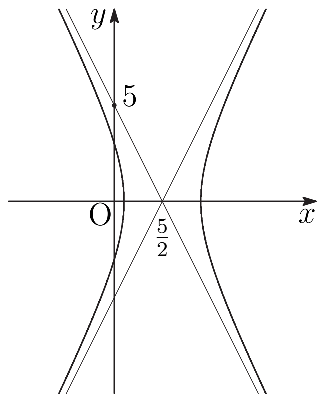
$$2x + y = 4t + 5, \quad 2x - y = \frac{4}{t} + 5$$

上の 2 式から，t を消去すると

$$(2x + y - 5)(2x - y - 5) = 16 \quad \text{ゆえに} \quad (2x - 5)^2 - y^2 = 16 \quad \cdots(*)$$

よって $$\boldsymbol{\frac{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1}$$

(2) (1) で求めた曲線は，双曲線 $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ を x 軸方向に $\dfrac{5}{2}$ だけ平行移動したもの．$(*)$ から，この曲線の漸近線は $y = 2x - 5$，$y = -2x + 5$



$(*)$ に $y = ax + 5$ を代入すると

$$(2x - 5)^2 - (ax + 5)^2 = 16$$

これを x について整理すると

$$(a^2 - 4)x^2 + 2(5a + 10)x + 16 = 0 \quad \cdots(**)$$

(i) $a = 2$ のとき，$y = 2x + 5$ は，$(*)$ の漸近線に平行となるので，求める共有点の個数は 1 個.

(ii) $a = -2$ のとき，$y = -2x + 5$ は，$(*)$ の漸近線と一致するので，求める共有点の個数は 0 個.

(iii) $a \neq \pm 2$ のとき，$(**)$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &= (5a + 10)^2 - (a^2 - 4) \cdot 16 \\ &= 9a^2 + 100a + 164 = (a + 2)(9a + 82) \end{aligned}$$

ゆえに
$a < -\dfrac{82}{9}$，$-2 < a$ のとき　共有点の個数は 2 個
$a = -\dfrac{82}{9}$ のとき　共有点の個数は 1 個
$-\dfrac{82}{9} < a < -2$ のとき　共有点の個数は 0 個

(i)〜(iii) から，共有点の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{a < -\dfrac{82}{9},\ -2 < a < 2,\ 2 < a} \ \textbf{のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{a = -\dfrac{82}{9},\ 2} \ \textbf{のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{-\dfrac{82}{9} < a \leqq -2} \ \textbf{のとき} & \textbf{0 個} \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $x^3-ax-6=0\cdots(*)$ が $x=-1$ を解にもつから

$$(-1)^3-a(-1)-6=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a=7}$$

これを $(*)$ に代入すると

$$x^3-7x-6=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x+2)(x-3)=0$$

よって，求める他の解は　$\boldsymbol{x=-2,\ 3}$

(2) $\log_2\dfrac{1}{6}+\log_2\dfrac{3}{4}=\log_2\dfrac{1}{8}=\log_2 2^{-3}=\boldsymbol{-3}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ \sqrt{3})$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より，$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{13}{6}\pi$ であるから

$$\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{3}} \text{ のとき　最大値 } \mathbf{2}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 点 A(0, 4) を頂点とする放物線を $y=kx^2+4$ とおく (k は定数).
これが点 B(2, 0) を通るから

$$k\cdot 2^2+4=0 \quad \text{ゆえに} \quad k=-1$$

よって，求める 2 次関数は　$\boldsymbol{y=-x^2+4}$

(2) (1) の結果から　$y=-(x+2)(x-2)$
放物線と x 軸との交点で点 B(2, 0) と異なる点 D の座標は　$(-2,\ 0)$
$y=-x^2+4$ を微分すると　$y'=-2x$
放物線上の点 $\mathrm{C}(2a, -4a^2+4)$ における接線 l_1 の方程式は

$$y-(-4a^2+4)=-4a(x-2a)$$

すなわち　$y=-4ax+4a^2+4 \quad \cdots ①$
また，放物線上の点 D(−2, 0) における接線 l_2 の方程式は，① に $a=-1$ に代入して　$y=4x+8 \quad \cdots ②$
①，② から y を消去すると

$$-4ax+4a^2+4=4x+8 \quad \text{ゆえに} \quad (a+1)x=a^2-1$$

$a>0$ より，$a+1\neq 0$ であるから　$x=a-1$
これを ② に代入して　$y=4a+4$　よって，E の座標は　$\boldsymbol{(a-1,\ 4a+4)}$

(3) 求める面積を S とすると，(2) の結果から

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{a-1} \{(4x+8)-(-x^2+4)\}\,dx \\ &= \int_{-2}^{a-1} (x+2)^2\,dx \\ &= \left[\ \frac{1}{3}(x+2)^3\ \right]_{-2}^{a-1} = \boldsymbol{\frac{1}{3}(a+1)^3} \end{aligned}$$