

平成 26 年度 琉球大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

理・工・医・農・教育学部 平成 26 年 2 月 25 日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部は, [1] ~ [4] 数 I・II・III・A・B・C (120 分)
- 農・教育 (学校教育 [教育実践学・技術・特別支援], 生涯教育 [自然環境科学]) 学部は, [5], [6] 数 I・II・A・B (60 分)

[1] 次の問いに答えよ.

(1) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx$ を求めよ.

(2) $AB = AC = 1$ である二等辺三角形 ABC において, $BC = 2x$, 内接円の半径を r とおく.

(i) r を x を用いて表せ.

(ii) r が最大となる x の値を求めよ (最大値そのものは求める必要はない).

[2] a, b, c, d は $a + d = 0, ad - bc = 1$ をみたす実数とし, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) $A^2 = -E$ を示せ.

(2) p, q は実数で $p^2 + q^2 \neq 0$ をみたすとする. 実数 x, y に対して

$$(pA + qE)(xA + yE) = E$$

が成り立つとき, x, y を p, q で表せ.

(3) θ を実数とする. すべての正の整数 n に対して

$$\{(\cos \theta)E + (\sin \theta)A\}^n = (\cos n\theta)E + (\sin n\theta)A$$

が成り立つことを, 数学的帰納法を用いて証明せよ. ここで, $(\sin \theta)A$ は行列 A の $\sin \theta$ 倍を表す.

3 整数 m, n は $m \geq 1, n \geq 2$ をみたすとする. 次の問いに答えよ.

- (1) $x > 0$ のとき, $y = \log x$ の第 1 次導関数 y' と第 2 次導関数 y'' を求めよ. 答を記すのみでよい.
- (2) 座標平面上の 3 点 $A(m, \log m), B(m+1, \log m), C(m+1, \log(m+1))$ を頂点とする三角形の面積を S_m とする. S_m を m を用いて表せ. 答を記すのみでよい.
- (3) $f(m) = \log m + S_m - \int_m^{m+1} \log x \, dx$ とおく. $f(m) < 0$ が成り立つことを, $y = \log x$ のグラフを用いて説明せよ.
- (4) $f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) < 0$ であることを用いて, 不等式

$$\log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1) < n \log n - n + 1 - \frac{1}{2} \log n$$

を証明せよ.

- (5) 不等式 $n! < e\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ を証明せよ. ただし, e は自然数の底である.

4 1 個のさいころを繰り返し投げて景品を当てるゲームを行う. 景品は A と B の 2 種類があり, 次の規則にしたがって景品をもらえるとす.

- ・ 出た目の数が 6 のときは, 景品 A をもらえる.
- ・ 出た目の数が 4, 5 のときは, 景品 B をもらえる.
- ・ 出た目の数が 1, 2, 3 のときは, 景品はもらえない.
- ・ 景品 A と景品 B の 2 種類とももらえることができたならゲームは終了する.

ちょうど n 回さいころを投げ終わったところでゲームが終了する確率を p_n とする. 次の問いに答えよ.

- (1) p_2 の値を求めよ.
- (2) n を 2 以上の整数とする. p_n を n を用いて表せ.
- (3) n を 2 以上の整数とする. 不等式

$$p_{n+1} - p_n < \frac{2}{3}(p_n - p_{n-1})$$

を示せ. ただし, $p_1 = 0$ とする.

5 $\triangle ABC$ において、辺 AB を $2:1$ に内分する点を D 、辺 AC を $3:1$ に内分する点を E とし、線分 CD 、 BE の交点を P とする。次の問いに答えよ。

(1) \overrightarrow{AP} を、 \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AC} を用いて表せ。

(2) $AB = 3$ 、 $AC = 4$ 、 $AP = \sqrt{7}$ のとき、 $\angle BAC$ の大きさを求めよ。

6 a 、 b を実数とし、放物線 $y = x(x - a)$ を C とする。次の問いに答えよ。

(1) C 上の点 $(t, t(t - a))$ における C の接線の方程式を求めよ。

(2) 点 $(b, 0)$ から C に、相異なる 2 本の接線が引けるとする。このとき、 a 、 b がみたす不等式を求め、その不等式が表す領域を、 ab 平面上に図示せよ。

(3) C と x 軸が囲む部分の面積を $S(a)$ とする。関数 $y = S(a)$ ($-2 \leq a \leq 2$) のグラフをかけ。

正解

$$\boxed{1} \quad (1) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x \, dx = \left[\frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

$$(2) \quad (i) \quad s = \frac{1}{2}(1+1+2x) = 1+x \text{ とおくと, ヘロンの公式により}$$

$$\begin{aligned} \Delta ABC &= \sqrt{s(s-1)(s-1)(s-2x)} \\ &= \sqrt{(1+x)x \cdot x(1-x)} = x\sqrt{(1+x)(1-x)} \end{aligned}$$

$\Delta ABC = rs$ に上の諸式を代入すると

$$x\sqrt{(1+x)(1-x)} = r(1+x) \quad \text{よって} \quad r = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$(ii) \quad (i) \text{ の結果から, } f(x) = r^2 \text{ とおくと } (0 < x < 1)$$

$$f(x) = \frac{x^2(1-x)}{1+x} = -x^2 + 2x - 2 + \frac{2}{x+1}$$

$$\text{ゆえに} \quad f'(x) = -2x + 2 - \frac{2}{(x+1)^2} = -\frac{2x(x^2+x-1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = 0, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

したがって, $0 < x < 1$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	(0)	...	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$...	(1)
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	最大	↘	

$f(x)$ が最大となるとき, r は最大となる.

$$\text{よって, 求める } x \text{ の値は } x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

2 (1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ をハミルトン・ケリーの定理に適用すると

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$$

これに $a + d = 0$, $ad - bc = 1$ を代入すると

$$A^2 + E = O \quad \text{よって} \quad A^2 = -E$$

(2) $(pA + qE)(xA + yE) = E$ より $pxA^2 + (qx + py)A + qyE = E$

$$A^2 = -E \text{ より} \quad (qx + py)A = (px - qy + 1)E \quad \cdots (*)$$

$qx + py \neq 0$ のとき, 実数 k を用いて, $A = kE$ とおくと

$$A^2 = k^2E$$

これは, $A^2 = -E$ に反するので, $qx + py = 0$ となり, (*) より

$$px - qy = -1, \quad qx + py = 0 \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p^2 + q^2 \neq 0 \text{ より} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{p^2 + q^2} \begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{p^2 + q^2} \begin{pmatrix} -p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\text{よって} \quad x = -\frac{p}{p^2 + q^2}, \quad y = \frac{q}{p^2 + q^2}$$

(3) この等式を (*) とする.

i) $n = 1$ のとき, 明らかに (*) が成り立つ.

ii) $n = k$ のとき

$$\{(\cos \theta)E + (\sin \theta)A\}^k = (\cos k\theta)E + (\sin k\theta)A$$

が成り立つと仮定すると, $A^2 = -E$ に注意して

$$\begin{aligned} & \{(\cos \theta)E + (\sin \theta)A\}^{k+1} \\ &= \{(\cos k\theta)E + (\sin k\theta)A\} \{(\cos \theta)E + (\sin \theta)A\} \\ &= (\cos k\theta \cos \theta - \sin k\theta \sin \theta)E + (\sin k\theta \cos \theta + \cos k\theta \sin \theta)A \\ &= \{\cos(k+1)\theta\}E + \{\sin(k+1)\theta\}A \end{aligned}$$

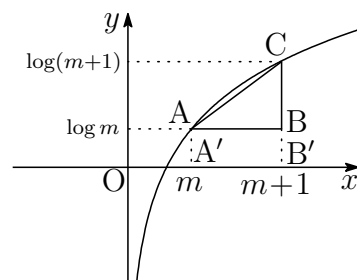
したがって, $n = k + 1$ のときも (*) が成り立つ.

i), ii) から, すべての自然数 n について (*) が成り立つ.

3 (1) $y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}$

(2) (右図により)

$$S_m = \frac{1}{2} \{ \log(m+1) - \log m \}$$



(3) 右の図のように、2点 A, B から x 軸にそれぞれ垂線 AA' , BB' を引くと、台形 $AA'B'C$ の面積が $\log m + S_m$ であるから、グラフから

$$\log m + S_m < \int_m^{m+1} \log x dx$$

ゆえに $\log m + S_m - \int_m^{m+1} \log x dx < 0$

よって $f(m) < 0$

(4) (2) の結果から $\sum_{m=1}^{n-1} S_m = \frac{1}{2} \log n$

$\sum_{m=1}^{n-1} f(m) < 0$ であるから、上式および (3) の結果から

$$\sum_{m=1}^{n-1} \left(\log m + S_m - \int_m^{m+1} \log x dx \right) < 0$$

$$\sum_{m=1}^{n-1} \log m + \frac{1}{2} \log n - \int_1^n \log x dx < 0$$

$$\sum_{m=1}^{n-1} \log m < \left[x \log -x \right]_1^n - \frac{1}{2} \log n$$

よって $\log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1) < n \log n - n + 1 - \frac{1}{2} \log n$

(5) (4) の結果から

$$\log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1) + \log n < 1 + \frac{1}{2} \log n + n(\log n - 1)$$

ゆえに $\log n! < \log e + \log \sqrt{n} + \log \left(\frac{n}{e} \right)^n$

したがって $\log n! < \log e \sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$ よって $n! < e \sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$

- 4 (1) ちょうど2回さいころを投げてゲームが終了するのは、1回目、2回目にそれぞれ景品A、景品Bをもらう場合と、1回目、2回目にそれぞれ景品B、景品Aをもらう場合であるから

$$p_2 = \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$$

- (2) ちょうど n 回さいころを投げてゲームが終了するのは、次のi), ii)である.

- i) $n-1$ 回までの少なくとも1回景品Aをもらい、 n 回目で初めて景品Bをもらう場合.

$$\left\{ \left(\frac{4}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{3}{6}\right)^{n-1} \right\} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}$$

- ii) $n-1$ 回までの少なくとも1回景品Bをもらい、 n 回目で初めて景品Aをもらう場合.

$$\left\{ \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{3}{6}\right)^{n-1} \right\} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{i), ii) より } p_n &= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\} + \frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(3) (2) より } p_{n-1} - p_n &= \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\} \\ &\quad - \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{36} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$$\text{したがって } (p_n - p_{n+1}) - \frac{2}{3}(p_{n-1} - p_n)$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{36} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\} \\ &\quad - \frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{36} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} \\ &= \frac{1}{216} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } p_n - p_{n+1} > \frac{2}{3}(p_{n-1} - p_n) \quad \text{よって } p_{n+1} - p_n < \frac{2}{3}(p_n - p_{n-1})$$

5 (1) $\vec{AP} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ とおく.

$$\vec{AB} = \frac{3}{2}\vec{AD} \text{ であるから } \vec{AP} = \frac{3}{2}x\vec{AD} + y\vec{AC}$$

点 P は直線 CD 上にあるから

$$\frac{3}{2}x + y = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\vec{AC} = \frac{4}{3}\vec{AE} \text{ であるから } \vec{AP} = x\vec{AB} + \frac{4}{3}y\vec{AE}$$

点 P は直線 BE 上にあるから

$$x + \frac{4}{3}y = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を解いて } x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{2} \text{ よって } \vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$$

別解 $\triangle ACD$ と直線 BE について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DB}{BA} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{1} \times \frac{CP}{PD} \times \frac{1}{3} = 1$$

CP = PD となり、P は線分 CD の中点であるから

$$\vec{AP} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AD})$$

これに $\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ を代入すると

$$\vec{AP} = \frac{1}{2} \left(\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AB} \right) = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$$

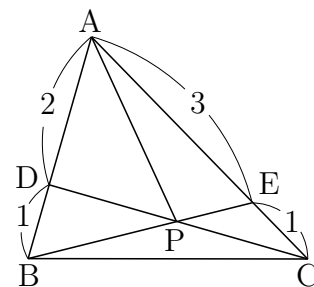
(2) (1) の結果から

$$|\vec{AP}|^2 = \frac{1}{9}|\vec{AB}|^2 + \frac{1}{3}\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \frac{1}{4}|\vec{AC}|^2$$

これに $|\vec{AP}| = \sqrt{7}$, $|\vec{AB}| = 3$, $|\vec{AC}| = 4$ を代入すると

$$(\sqrt{7})^2 = \frac{1}{9} \cdot 3^2 + \frac{1}{3}\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \frac{1}{4} \cdot 4^2 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 6$$

したがって $\cos \angle BAC = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{6}{3 \cdot 4} = \frac{1}{2}$ よって $\angle BAC = 60^\circ$



6 (1) $y = x(x - a) = x^2 - ax$ を微分すると $y' = 2x - a$

したがって、 C 上の点 $(t, t(t - a))$ における接線の方程式は

$$y - t(t - a) = (2t - a)(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = (2t - a)x - t^2$$

(2) (1) で求めた接線が点 $(b, 0)$ を通るとき

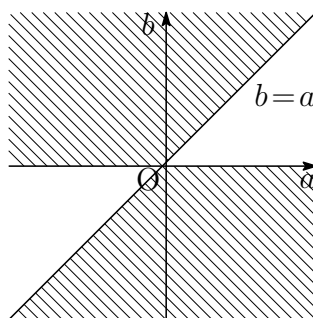
$$0 = (2t - a)b - t^2 \quad \text{整理すると} \quad t^2 - 2bt + ab = 0$$

このとき、上の t に関する 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつので

$$D/4 = (-b)^2 - 1 \cdot ab > 0 \quad \text{ゆえに} \quad b(b - a) > 0$$

$$\text{したがって} \quad \begin{cases} b > 0 \\ b - a > 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} b < 0 \\ b - a < 0 \end{cases}$$

よって、求める領域は下の図の斜線部分。ただし、境界線を含まない。



(3) C と x 軸が囲む部分の面積 $S(a)$ は

i) $-2 \leq a < 0$ のとき

$$S(a) = - \int_a^0 x(x - a) dx = - \left(-\frac{1}{6} \right) (0 - a)^3 = -\frac{1}{6}a^6$$

ii) $0 \leq a \leq 2$ のとき

$$S(a) = - \int_0^a x(x - a) dx = - \left(-\frac{1}{6} \right) (a - 0)^3 = \frac{1}{6}a^6$$

i), ii) より、 $S(a)$ および $y = S(a)$ のグラフは、次のようになる

$$S(a) = \begin{cases} -\frac{1}{6}a^3 & (-2 \leq a < 0) \\ \frac{1}{6}a^3 & (0 \leq a \leq 2) \end{cases}$$

