平成 26 年度　琉球大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・農・教育学部　平成 26 年 2 月 25 日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部　1 2 3 4 数 I・II・III・A・B・C (120 分)
- 農・教育 (学校教育 [教育実践学・技術・特別支援]，生涯教育 [自然環境科学]) 学部　5 6 数 I・II・A・B (60 分)

1 次の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx$ を求めよ．

(2) AB $=$ AC $= 1$ である二等辺三角形 ABC において，BC $= 2x$，内接円の半径を r とおく．

(i) r を x を用いて表せ．

(ii) r が最大となる x の値を求めよ (最大値そのものは求める必要はない)．

2 a，b，c，d は $a+d=0$，$ad-bc=1$ をみたす実数とし，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $A^2=-E$ を示せ．

(2) p，q は実数で $p^2+q^2 \neq 0$ をみたすとする．実数 x，y に対して

$$(pA+qE)(xA+yE)=E$$

が成り立つとき，x，y を p，q で表せ．

(3) θ を実数とする．すべての正の整数 n に対して

$$\{(\cos\theta)E+(\sin\theta)A\}^n=(\cos n\theta)E+(\sin n\theta)A$$

が成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明せよ．ここで，$(\sin\theta)A$ は行列 A の $\sin\theta$ 倍を表す．

3 整数 m，n は $m \geqq 1$，$n \geqq 2$ をみたすとする．次の問いに答えよ．

(1) $x > 0$ のとき，$y = \log x$ の第 1 次導関数 y' と第 2 次導関数 y'' を求めよ．答を記すのみでよい．

(2) 座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(m,\ \log m)$，$\mathrm{B}(m+1,\ \log m)$，$\mathrm{C}(m+1,\ \log(m+1))$ を頂点とする三角形の面積を S_m とする．S_m を m を用いて表せ．答を記すのみでよい．

(3) $f(m) = \log m + S_m - \displaystyle\int_m^{m+1} \log x\, dx$ とおく．$f(m) < 0$ が成り立つことを，$y = \log x$ のグラフを用いて説明せよ．

(4) $f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) < 0$ であることを用いて，不等式

$$\log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1) < n \log n - n + 1 - \frac{1}{2} \log n$$

を証明せよ．

(5) 不等式 $n! < e\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ を証明せよ．ただし，e は自然対数の底である．

4 1 個のさいころを繰り返し投げて景品を当てるゲームを行う．景品は A と B の 2 種類があり，次の規則にしたがって景品をもらえるとする．

- 出た目の数が 6 のときは，景品 A をもらえる．
- 出た目の数が 4，5 のときは，景品 B をもらえる．
- 出た目の数が 1，2，3 のときは，景品はもらえない．
- 景品 A と景品 B の 2 種類とももらえることができたらゲームは終了する．

ちょうど n 回さいころを投げ終わったところでゲームが終了する確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1) p_2 の値を求めよ．

(2) n を 2 以上の整数とする．p_n を n を用いて表せ．

(3) n を 2 以上の整数とする．不等式

$$p_{n+1} - p_n < \frac{2}{3}(p_n - p_{n-1})$$

を示せ．ただし，$p_1 = 0$ とする．

$\boxed{\mathbf{5}}$ △ABC において，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D，辺 AC を 3 : 1 に内分する点を E とし，線分 CD，BE の交点を P とする．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ．

(2) $\mathrm{AB} = 3$，$\mathrm{AC} = 4$，$\mathrm{AP} = \sqrt{7}$ のとき，$\angle\mathrm{BAC}$ の大きさを求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ a，b を実数とし，放物線 $y = x(x-a)$ を C とする．次の問いに答えよ．

(1) C 上の点 $(t,\ t(t-a))$ における C の接線の方程式を求めよ．

(2) 点 $(b,\ 0)$ から C に，相異なる 2 本の接線が引けるとする．このとき，a，b がみたす不等式を求め，その不等式が表す領域を，ab 平面上に図示せよ．

(3) C と x 軸が囲む部分の面積を $S(a)$ とする．関数 $y = S(a)$ $(-2 \leqq a \leqq 2)$ のグラフをかけ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}}$

(2) (i) $s = \dfrac{1}{2}(1+1+2x) = 1+x$ とおくと，ヘロンの公式により

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \sqrt{s(s-1)(s-1)(s-2x)}\\ &= \sqrt{(1+x)x{\cdot}x(1-x)} = x\sqrt{(1+x)(1-x)}\end{aligned}$$

$\triangle\mathrm{ABC} = rs$ に上の諸式を代入すると

$$x\sqrt{(1+x)(1-x)} = r(1+x) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{r = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$$

(ii) (i) の結果から，$f(x) = r^2$ とおくと $(0 < x < 1)$

$$f(x) = \frac{x^2(1-x)}{1+x} = -x^2 + 2x - 2 + \frac{2}{x+1}$$

ゆえに $\quad f'(x) = -2x + 2 - \dfrac{2}{(x+1)^2} = -\dfrac{2x(x^2+x-1)}{(x+1)^2}$

$f'(x) = 0$ とすると $\quad x = 0,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

したがって，$0 < x < 1$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	最大	$\searrow$	

$f(x)$ が最大となるとき，r は最大となる．

よって，求める x の値は $\quad \boldsymbol{x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ ■

2 (1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ をハミルトン・ケリーの定理に適用すると

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

これに $a+d=0$，$ad-bc=1$ を代入すると

$$A^2 + E = O \quad \text{よって} \quad A^2 = -E$$

(2) $(pA+qE)(xA+yE) = E$ より　$pxA^2 + (qx+py)A + qyE = E$

$A^2 = -E$ より　　$(qx+py)A = (px-qy+1)E \quad \cdots(*)$

$qx+py \neq 0$ のとき，実数 k を用いて，$A = kE$ とおくと

$$A^2 = k^2E$$

これは，$A^2 = -E$ に反するので，$qx+py=0$ となり，$(*)$ より

$px-qy=-1,\ qx+py=0$　すなわち　$\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$p^2+q^2 \neq 0$ より　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{p^2+q^2}\begin{pmatrix} p & q \\ -q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{p^2+q^2}\begin{pmatrix} -p \\ q \end{pmatrix}$

よって　　$\boldsymbol{x = -\dfrac{p}{p^2+q^2},\ \ y = \dfrac{q}{p^2+q^2}}$

(3) この等式を $(*)$ とする．

i) $n=1$ のとき，明らかに $(*)$ が成り立つ．

ii) $n=k$ のとき

$$\{(\cos\theta)E + (\sin\theta)A\}^k = (\cos k\theta)E + (\sin k\theta)A$$

が成り立つと仮定すると，$A^2=-E$ に注意して

$$\begin{aligned}
&\{(\cos\theta)E + (\sin\theta)A\}^{k+1} \\
=&\{(\cos k\theta)E + (\sin k\theta)A\}\{(\cos\theta)E + (\sin\theta)A\} \\
=&(\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta)E + (\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta)A \\
=&\{\cos(k+1)\theta\}E + \{\sin(k+1)\theta\}A
\end{aligned}$$

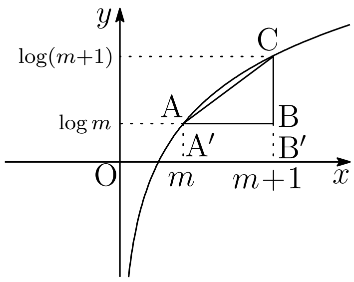
したがって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

i)，ii) から，すべての自然数 n について $(*)$ が成り立つ．　■

$\boxed{3}$ (1) $\boldsymbol{y' = \dfrac{1}{x},\ \ y'' = -\dfrac{1}{x^2}}$

(2) (右図により)

$$\boldsymbol{S_m = \frac{1}{2}\{\log(m+1) - \log m\}}$$



(3) 右の図のように，2 点 A，B から x 軸にそれぞれ垂線 AA′，BB′ を引くと，台形 AA′B′C の面積が $\log m + S_m$ であるから，グラフから

$$\log m + S_m < \int_m^{m+1} \log x\,dx$$

ゆえに　$\log m + S_m - \displaystyle\int_m^{m+1} \log x\,dx < 0$

よって　$f(m) < 0$

(4) (2) の結果から　$\displaystyle\sum_{m=1}^{n-1} S_m = \frac{1}{2}\log n$

$\displaystyle\sum_{m=1}^{n-1} f(m) < 0$ であるから，上式および (3) の結果から

$$\sum_{m=1}^{n-1}\left(\log m + S_m - \int_m^{m+1}\log x\,dx\right) < 0$$
$$\sum_{m=1}^{n-1}\log m + \frac{1}{2}\log n - \int_1^n \log x\,dx < 0$$
$$\sum_{m=1}^{n-1}\log m < \Big[\,x\log x - x\,\Big]_1^n - \frac{1}{2}\log n$$

よって　$\log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1) < n\log n - n + 1 - \dfrac{1}{2}\log n$

(5) (4) の結果から

$$\log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1) + \log n < 1 + \frac{1}{2}\log n + n(\log n - 1)$$

ゆえに　$\log n! < \log e + \log\sqrt{n} + \log\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

したがって　$\log n! < \log e\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$　よって　$n! < e\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$　■

4 (1) ちょうど2回さいころを投げてゲームが終了するのは，1回目，2回目にそれぞれ景品A，景品Bをもらう場合と，1回目，2回目にそれぞれ景品B，景品Aをもらう場合であるから

$$p_2 = \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{9}}$$

(2) ちょうどn回さいころを投げてゲームが終了するのは，次のi)，ii)である．

i) $n-1$回までの少なくとも1回景品Aをもらい，n回目で初めて景品Bをもらう場合．

$$\left\{\left(\frac{4}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}\right\} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

ii) $n-1$回までの少なくとも1回景品Bをもらい，n回目で初めて景品Aをもらう場合．

$$\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}\right\} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

i)，ii) より

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} + \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}} \end{aligned}$$

(3) (2) より

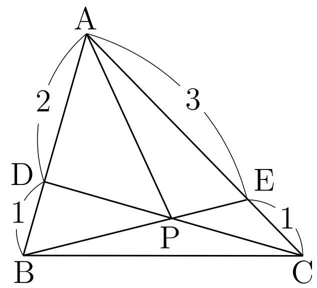
$$\begin{aligned} p_{n-1} - p_n &= \left\{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \\ &\quad - \left\{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\} \\ &= \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \end{aligned}$$

したがって　$(p_n - p_{n+1}) - \dfrac{2}{3}(p_{n-1} - p_n)$

$$\begin{aligned} &= \left\{\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} \\ &\quad - \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\} \\ &= \frac{1}{216}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} > 0 \end{aligned}$$

ゆえに　$p_n - p_{n+1} > \dfrac{2}{3}(p_{n-1} - p_n)$　よって　$p_{n+1} - p_n < \dfrac{2}{3}(p_n - p_{n-1})$ ■

$\boxed{5}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおく．



$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{3}{2}x\overrightarrow{\mathrm{AD}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

点 P は直線 CD 上にあるから

$$\frac{3}{2}x + y = 1 \quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{4}{3}y\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

点 P は直線 BE 上にあるから

$$x + \frac{4}{3}y = 1 \quad \cdots ②$$

①，② を解いて　$x = \frac{1}{3}$，$y = \frac{1}{2}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$

別解 $\triangle$ACD と直線 BE について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BA}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{3}{1} \times \frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PD}} \times \frac{1}{3} = 1$$

CP $=$ PD となり，P は線分 CD の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}})$$

これに $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$$

(2) (1) の結果から

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2 = \frac{1}{9}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$$

これに $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = \sqrt{7}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 3$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 4$ を代入すると

$$(\sqrt{7})^2 = \frac{1}{9}\cdot 3^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{1}{4}\cdot 4^2 \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 6$$

したがって　$\cos\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \dfrac{6}{3\cdot 4} = \dfrac{1}{2}$　よって　$\boldsymbol{\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ}$

■

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $y=x(x-a)=x^2-ax$ を微分すると　$y'=2x-a$

したがって，C 上の点 $(t,\ t(t-a))$ における接線の方程式は

$$y-t(t-a)=(2t-a)(x-t)\quad\text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=(2t-a)x-t^2}$$

(2) (1) で求めた接線が点 $(b,\ 0)$ を通るとき

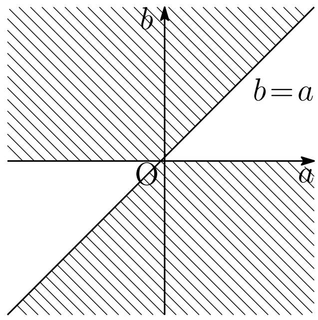
$$0=(2t-a)b-t^2\quad\text{整理すると}\quad t^2-2bt+ab=0$$

このとき，上の t に関する 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつので

$$D/4=(-b)^2-1\cdot ab>0\quad\text{ゆえに}\quad b(b-a)>0$$

したがって　$\begin{cases} b>0 \\ b-a>0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} b<0 \\ b-a<0 \end{cases}$

よって，求める領域は下の図の斜線部分．ただし，境界線を含まない．



(3) C と x 軸が囲む部分の面積 $S(a)$ は

i) $-2\leqq a<0$ のとき

$$S(a)=-\int_a^0 x(x-a)\,dx=-\left(-\frac{1}{6}\right)(0-a)^3=-\frac{1}{6}a^3$$

ii) $0\leqq a\leqq 2$ のとき

$$S(a)=-\int_0^a x(x-a)\,dx=-\left(-\frac{1}{6}\right)(a-0)^3=\frac{1}{6}a^3$$

i)，ii) より，$S(a)$ および $y=S(a)$ のグラフは，次のようになる

$$S(a)=\begin{cases} -\dfrac{1}{6}a^3 & (-2\leqq a<0) \\ \dfrac{1}{6}a^3 & (0\leqq a\leqq 2) \end{cases}$$