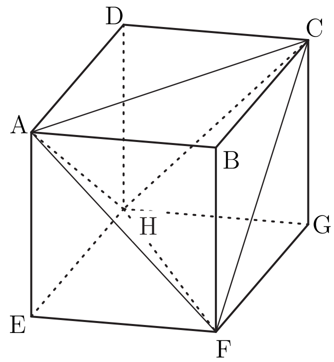
平成 25 年度　琉球大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・農・教育学部　平成 25 年 2 月 25 日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B・C (120 分)
- 農・教育 (学校教育 [教育実践学・技術・特別支援]，生涯教育 [自然環境科学]) 学部は，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (60 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 直径 1 の球を球の中心から距離 a の平面で切って二つの部分に分けたとき，中心を含まない部分の体積を求めよ．ただし，$0 < a < \dfrac{1}{2}$ とする．

(2) 一辺の長さが 1 である立方体 ABCD-EFGH を考える．この立方体に内接する球と正四面体 ACFH との共通部分の体積を求めよ．



$\boxed{\mathbf{2}}$ xy 平面上の曲線 C は媒介変数 θ を用いて

$$x = \frac{2}{3}\sqrt{3}\cos\theta + \frac{\sqrt{6}}{3}\sin\theta, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta - \frac{\sqrt{6}}{3}\sin\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

と表される．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 C を表す x と y の関係式を求め，xy 平面に図示せよ．

(2) 点 $(2,\ 0)$ から曲線 C に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ a を自然数とする．赤球 3 個，白球 a 個が入った袋から一つずつ順に取り出す操作をすべての球を取り出すまで繰り返す．ただし，取り出した球は元に戻さない．このとき，2 個目の赤球が出る前までに取り出した球の数を X とする．次の問いに答えよ．

(1) $a = 4$ とする．3 番目までに赤球が 1 個だけ出て，4 番目が赤球である確率を求めよ．

(2) $X = n$ となる確率を p_n とする．p_n が最大となる n の値を a を用いて表せ．

(3) X の期待値を求めよ．

$\boxed{\textbf{4}}$ m を正の定数とする．次の問いに答えよ．

(1) xy 平面上に 2 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{P}(1,\ m)$ がある．このとき 2 点 Q，R の座標を，$\triangle$OPQ，$\triangle$OPR がともに正三角形となるように定めよ．ただし，点 Q は xy 平面上の $y > mx$ となる領域に，点 R は xy 平面上の $y < mx$ となる領域に定めよ．

(2) (1) で定めた 3 点 P，Q，R について，一次変換 f は点 P を同じ点 P に，点 Q を点 R に移すものとする．この一次変換 f を表す行列 A を求めよ．

$\boxed{\textbf{5}}$ t を $0 \leqq t < 2$ をみたす定数とする．放物線 $y = (x-2)^2$ 上の点 $(t,\ (t-2)^2)$ における接線を l とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 接線 l の方程式を求めよ．

(2) 直線 l と x 軸の交点を求めよ．

(3) 直線 l と x 軸，y 軸によって囲まれる部分の面積を $S(t)$ とする．$0 \leqq t < 2$ において $S(t)$ が最大となるときの t の値と $S(t)$ の値を求めよ．

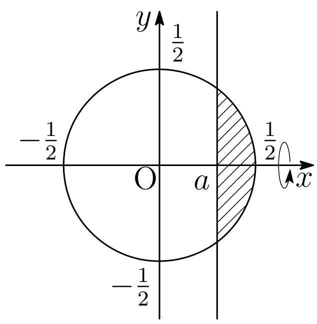
$\boxed{\textbf{6}}$ $\triangle$ABC の 3 辺の長さが $\mathrm{AB} = 6$，$\mathrm{BC} = 5$，$\mathrm{CA} = 4$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1) $\cos\angle\mathrm{BAC}$ を求めよ．

(2) $\angle$BAC の二等分線と辺 BC の交点を L とする．線分 AL の長さを求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 原点を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円



$$x^2+y^2=\frac{1}{4}$$

の $a \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ を x 軸のまわりに回転させた図形の体積であるから，求める体積を V とすると

$$V=\pi\int_a^{\frac{1}{2}} y^2\,dx=\pi\int_a^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-x^2\right)dx$$
$$=\pi\left[\,\frac{1}{4}x-\frac{x^3}{3}\,\right]_a^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{4}a+\frac{1}{12}\right)\pi}$$

(2) 立方体 ABCD-EFGH を空間の立体として，H(0, 0, 0)，E(1, 0, 0)，G(0, 1, 0)，D(0, 0, 1) とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 1,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AF}}=(0,\ 1,-1),\quad \overrightarrow{\mathrm{HB}}=(1,\ 1,\ 1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}}=0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ は，平面 ACF に垂直である．この立方体の内接円の中心を O とし，$\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ から平面 ACF 引いた垂線を OT とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=k\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t\overrightarrow{\mathrm{AF}}$$

であるから (k，s，t は実数)

$$k(1,\ 1,\ 1)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)+s(-1,\ 1,\ 0)+t(0,\ 1,-1)$$

したがって　$k=\dfrac{1}{2}-s=-\dfrac{1}{2}+s+t=\dfrac{1}{2}-t$　ゆえに　$k=\dfrac{1}{6}$

$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ であるから　　$|\overrightarrow{\mathrm{OT}}|=\dfrac{1}{6}|\overrightarrow{\mathrm{HB}}|=\dfrac{1}{6}\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

三角錐 ABCF と内接円の共通部分の体積を V_1 とすると，

(1) の結果に $a=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ を代入して

$$V_1=\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)+\frac{1}{12}\right\}\pi=\left(\frac{1}{12}-\frac{\sqrt{3}}{27}\right)\pi$$

よって，求める体積 V は　$V=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^3-4V_1=\boldsymbol{\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{27}-\dfrac{1}{6}\right)\pi}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $$x = \frac{2}{3}\sqrt{3}\cos\theta + \frac{\sqrt{6}}{3}\sin\theta = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right)$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta - \frac{\sqrt{6}}{3}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin\theta$$

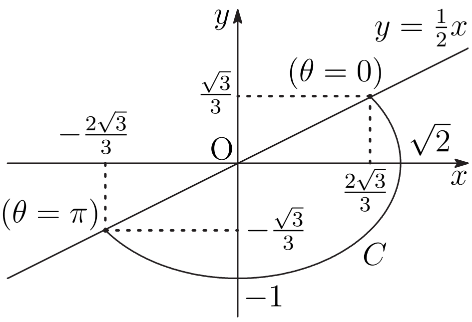
ここで，$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,　$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　$\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$x = \sqrt{2}(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta) \qquad y = \sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta$$
$$= \sqrt{2}\cos(\alpha - \theta) \qquad\qquad = \sin(\alpha - \theta)$$

上の 2 式から C は，楕円 $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$ の一部で，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，直線 $y = \dfrac{x}{2}$ およびその下側にある．

よって　$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1,\ \ y \leqq \dfrac{x}{2}}$

C の表す図形は，右の図のとおり．



(2) 点 $(2,\ 0)$ から曲線 C に引いた接線の接点を $\mathrm{P}(p,\ q)$ とすると，P は C 上の点であるから

$$\frac{p^2}{2} + q^2 = 1,\quad q \leqq \frac{p}{2}$$

P における接線 $\dfrac{p}{2}x + qy = 1$ が点 $(2,\ 0)$ を通るから　$p = 1$

これを上式に代入すると

$$q^2 = \frac{1}{2},\quad q \leqq \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad q = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって　　接点 $\boldsymbol{\left(1, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}$，接線 $\boldsymbol{x - \sqrt{2}\,y = 2}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 赤球 3 個，白球 4 個の 7 個から 4 個取って並べる場合の総数は ${}_7\mathrm{P}_4$ 通り．
3 番目までに赤球が 1 個と 4 番目に赤球が並ぶのは 3 通りあり，それぞれについて赤球 2 個と白球 2 個を並べる方法は ${}_3\mathrm{P}_2 \times {}_4\mathrm{P}_2$ 通りある．

よって，求める確率は $\dfrac{3 \times {}_3\mathrm{P}_2 \times {}_4\mathrm{P}_2}{{}_7\mathrm{P}_4} = \dfrac{3 \times 3{\cdot}2 \times 4{\cdot}3}{7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4} = \boldsymbol{\dfrac{9}{35}}$

(2) 赤球 3 個，白球 a 個の $a+3$ 個から $n+1$ 個取って並べる場合の総数は

$${}_{a+3}\mathrm{P}_{n+1} \quad (\text{通り})$$

n 番目までに赤球が 1 個と $n+1$ 番目に赤球が並ぶのは n 通りあり，それぞれについて赤球 2 個と白球 $n-1$ 個を並べる方法は ${}_3\mathrm{P}_2 \times {}_a\mathrm{P}_{n-1}$ 通りある．

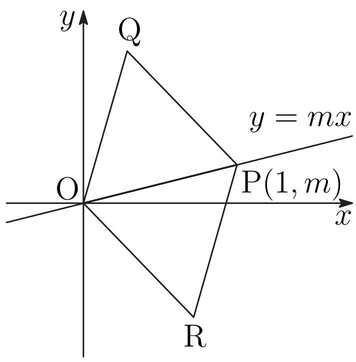
$$\begin{aligned}
p_n &= \frac{n \times {}_3\mathrm{P}_2 \times {}_a\mathrm{P}_{n-1}}{{}_{a+3}\mathrm{P}_{n+1}} = n \times {}_3\mathrm{P}_2 \times {}_a\mathrm{P}_{n-1} \times \frac{1}{{}_{a+3}\mathrm{P}_{n+1}} \\
&= n \times 3{\cdot}2 \times \frac{a!}{(a-n+1)!} \times \frac{(a-n+2)!}{(a+3)!} \\
&= \frac{6n(a-n+2)}{(a+1)(a+2)(a+3)} \\
&= \frac{-6\{n^2-(a+2)n\}}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{-6\left(n-\dfrac{a+2}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{2}(a+2)^2}{(a+1)(a+2)(a+3)}
\end{aligned}$$

よって，p_n が最大になる n は $\begin{cases} \boldsymbol{a}\ \textbf{が偶数のとき} & \boldsymbol{\dfrac{a+2}{2}} \\ \boldsymbol{a}\ \textbf{が奇数のとき} & \boldsymbol{\dfrac{a+1}{2}},\ \boldsymbol{\dfrac{a+3}{2}} \end{cases}$

(3) $1 \leqq n \leqq a+1$ であるから，求める X の期待値 $E(X)$ は

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{n=1}^{a+1} n{\cdot}p_n = \sum_{n=1}^{a+1} n \times \frac{-6\{n^2-(a+2)n\}}{(a+1)(a+2)(a+3)} \\
&= \frac{6}{(a+1)(a+2)(a+3)} \sum_{n=1}^{a+1} \{-n^3+(a+2)n^2\} \\
&= \frac{6}{(a+1)(a+2)(a+3)} \\
&\qquad \times \left\{-\frac{1}{4}(a+1)^2(a+2)^2 + (a+2) \times \frac{1}{6}(a+1)(a+2)(2a+3)\right\} \\
&= \frac{6}{(a+1)(a+2)(a+3)} \times \frac{1}{12}(a+1)(a+2)^2\{-3(a+1)+2(2a+3)\} \\
&= \frac{a+2}{2(a+3)}\{-3(a+1)+2(2a+3)\} = \boldsymbol{\frac{a+2}{2}}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) Q は P を原点を中心に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた点であるから



$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3}m \\ \sqrt{3}+m \end{pmatrix}$$

R は P を原点を中心に $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた点であるから

$$\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3}m \\ -\sqrt{3}+m \end{pmatrix}$$

よって　$\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\frac{1-\sqrt{3}m}{2},\ \frac{\sqrt{3}+m}{2}}\right)$, $\mathbf{R}\left(\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{3}m}{2},\ \frac{-\sqrt{3}+m}{2}}\right)$

(2) 1 次変換 f を表す行列 A により P を P に，Q を R に移すから

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \quad \cdots ①\qquad A\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}m}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+m}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}m}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}+m}{2} \end{pmatrix}$$

第 2 式から　$A\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} + \sqrt{3}A\begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} + \sqrt{3}\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$

① を上式に代入すると　$A\begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix} \quad \cdots ②$

①，② により，$A\begin{pmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{pmatrix}$ であるから

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & m \\ -m & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{5}$ (1) $y=(x-2)^2$ より $y'=2(x-2)$ であるから　$x=t$ のとき　$y'=2(t-2)$

よって，点 $(t,\ (t-2)^2)$ における接線 l の方程式は

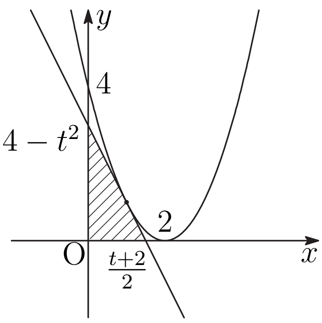
$$y-(t-2)^2=2(t-2)(x-t)\quad ゆえに\quad \boldsymbol{y=2(t-2)x-t^2+4}$$

(2) (1) の結果に $y=0$ を代入すると

$$2(t-2)x-t^2+4=0\quad ゆえに\quad 2(t-2)x=(t+2)(t-2)$$

$t\neq 2$ より　$x=\dfrac{t+2}{2}$　　よって，求める x 軸との交点は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{t+2}{2},\ 0\right)}$

(3) l の y 軸との交点の座標は $(0,\ 4-t^2)$ であるから，$0\leqq t<2$ および (2) の結果から



$$S(t)=\frac{1}{2}\times\frac{t+2}{2}\times(4-t^2)$$
$$=-\frac{1}{4}(t^3+2t^2-4t-8)$$

ゆえに　$S'(t)=-\dfrac{1}{4}(3t^2+4t-4)$

$$=-\frac{1}{4}(t+2)(3t-2)$$

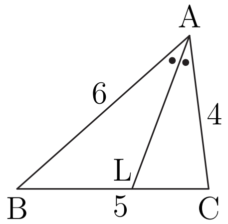
したがって，$0\leqq t<2$ における $S(t)$ の増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(2)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$	2	↗	極大	↘	

よって　　$\boldsymbol{t=\dfrac{2}{3}}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{\dfrac{64}{27}}$

$\boxed{6}$ (1) $\triangle$ABC に余弦定理を適用すると　$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{4^2+6^2-5^2}{2\cdot4\cdot6}=\boldsymbol{\dfrac{9}{16}}$

(2) (1) と同様に



$$\cos B=\frac{6^2+5^2-4^2}{2\cdot6\cdot4}=\frac{3}{4}$$

AL は $\angle$A の二等分線であるから

$$\mathrm{BL}=\frac{6}{6+4}\mathrm{BC}=\frac{3}{5}\times5=3$$

$\triangle$ABL に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{AL}^2=6^2+3^2-2\cdot6\cdot3\cos B=18\quad ゆえに\quad \boldsymbol{\mathrm{AL}=3\sqrt{2}}$$