平成24年度　琉球大学2次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・農・教育学部　平成24年2月25日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B・C (120分)
- 農・教育 (学校教育 [教育実践学・技術・特別支援]，生涯教育 [自然環境科学]) 学部は，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数I・II・A・B (60分)

1 曲線 $y = \sqrt{x^2 - 1}$ $(x \geqq 1)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ $(a > 1)$ での接線と y 軸との交点を Q とする．次の問いに答えよ．

(1) 点 Q の座標を b で表せ．

(2) PQ^2 の最小値を求めよ．

2 N を 2 以上の自然数とする．1 から N までの番号を 1 つずつ書いた N 枚のカードから 2 枚を同時に取り出し，そのうち大きい番号を X とし，小さい番号を Y とする．次の問に答えよ．

(1) i を 1 以上 N 以下の自然数とするとき，$X = i$ となる確率 p_i および $Y = i$ となる確率 q_i を求めよ．

(2) X の期待値 E_1 および Y の期待値 E_2 を求めよ．

3 数列 $\{c_n\}$ を次のように定義する．

$$c_1 = 1, \quad c_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3}\left(c_n + \frac{1}{4^{n+1}}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

次の問に答えよ．

(1) $n \geqq 2$ のとき，$a_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n}$ とする．このとき，$c_n = \frac{1}{3^{n-1}} + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{3^{n-i}}$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ が成り立つことを示せ．

(2) $\lim_{n \to \infty} c_n$ を求めよ．

4 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n \theta \, d\theta$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) I_1 および $I_n + I_{n+2}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ．

(2) 不等式 $I_n \geqq I_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を示せ．

(3) $\lim_{n \to \infty} n I_n$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問に答えよ．

(1) 次の数列の一般項を求めよ．　$1,\ 5,\ 11,\ 19,\ 29,\ 41,\ \cdots$

(2) $|\vec{a}\,| = 3$，$|\vec{b}\,| = 2$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° であるとき，$|\vec{a} - 3\vec{b}|$ を求めよ．

(3) 次の数を小さい順に並べよ．　$\log_3 5,\ \dfrac{1}{2} + \log_9 8,\ \log_9 26$

(4) 次の定積分を求めよ．　$\displaystyle\int_0^3 |x^2 - x - 2|\,dx$

$\boxed{\mathbf{6}}$ 次の問に答えよ．

(1) 加法定理を用いて，$\cos 2x$ および $\cos 3x$ を $\cos x$ で表せ．

(2) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，関数 $f(x) = \cos 3x + \cos 2x - 2\cos x$ の最大値および最小値を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y=\sqrt{x^2-1}$ を微分すると　$y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線の方程式は

$$y-b=\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}(x-a)\quad ゆえに\quad y=\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}x-\frac{a^2}{\sqrt{a^2-1}}+b$$

この直線と y 軸との交点 Q の y 座標は，$x=0$ を代入して

$$y=-\frac{a^2}{\sqrt{a^2-1}}+b$$

$\mathrm{P}(a,\ b)$ は曲線 $y=\sqrt{x^2-1}$ 上の点であるから

$$b=\sqrt{a^2-1}\qquad ゆえに\qquad a^2=b^2+1$$

したがって，Q の y 座標は　$y=-\dfrac{b^2+1}{b}+b=-\dfrac{1}{b}$

よって，点 Q の座標は　$\boldsymbol{\left(0,-\dfrac{1}{b}\right)}$

別解 $y=\sqrt{x^2-1}$ より，双曲線 $x^2-y^2=1$ 上の点 P における接線の方程式は

$ax-by=1$　この直線と y 軸の交点 Q の座標は　$\left(0,-\dfrac{1}{b}\right)$

(2) $\mathrm{P}(\sqrt{b^2+1},\ b)$，$\mathrm{Q}\left(0,-\dfrac{1}{b}\right)$ より

$$\mathrm{PQ}^2=b^2+1+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2=2b^2+\frac{1}{b^2}+3$$

相加平均・相乗平均の関係により　$2b^2+\dfrac{1}{b^2}\geqq 2\sqrt{2b^2\cdot\dfrac{1}{b^2}}=2\sqrt{2}$

したがって　$\mathrm{PQ}^2\geqq 3+2\sqrt{2}$　よって，求める最小値は　$\boldsymbol{3+2\sqrt{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) N 枚から 2 枚取り出す場合の総数は ${}_N\mathrm{C}_2$ (通り)

$X=i$ となるのは，$1, 2, \cdots, i-1$ から 1 枚と i の 1 枚を取り出す場合で，その総数は ${}_{i-1}\mathrm{C}_1$ (通り) である．したがって

$$p_i = \frac{{}_{i-1}\mathrm{C}_1}{{}_N\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{2(i-1)}{N(N-1)}}$$

$Y=i$ となるのは，$i+1, i+2, \cdots, N$ から 1 枚と i の 1 枚を取り出す場合で，その総数は ${}_{N-i}\mathrm{C}_1$ (通り) である．したがって

$$q_i = \frac{{}_{N-i}\mathrm{C}_1}{{}_N\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{2(N-i)}{N(N-1)}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}
E_1 &= \sum_{i=1}^{N} i\cdot p_i = \frac{2}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(i^2-i) \\
&= \frac{2}{N(N-1)}\left\{\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) - \frac{1}{2}N(N+1)\right\} \\
&= \boldsymbol{\frac{2}{3}(N+1)} \\
E_2 &= \sum_{i=1}^{N} i\cdot q_i = \frac{2}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(Ni-i^2) \\
&= \frac{2}{N(N-1)}\left\{\frac{1}{2}N^2(N+1) - \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)\right\} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{3}(N+1)}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $c_{n+1}=1+\dfrac{1}{2^{n+1}}+\dfrac{1}{3}\left(c_n+\dfrac{1}{4^{n+1}}\right)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ より

$$3^{n+1}c_{n+1}-3^nc_n=3^{n+1}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n+1}}\right)$$

$a_n=1+\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4^n}$ より $\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\left(3^ic_i-3^{i-1}c_{i-1}\right)=\sum_{i=2}^{n}3^ia_i$

$$3^nc_n-3c_1=\sum_{i=2}^{n}3^ia_i$$

$c_1=1$ であるから $\displaystyle c_n=\frac{1}{3^{n-1}}+\sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{3^{n-i}}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}
c_n&=\frac{1}{3^{n-1}}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{3^{n-i}}\left(1+\frac{1}{2^i}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^i}\right)\\
&=\frac{1}{3^{n-1}}+\sum_{i=2}^{n}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-i}+\frac{1}{2^n}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-i}\right\}+\frac{1}{3^{n+1}}\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^i\\
&=\frac{1}{3^{n-1}}+\sum_{i=0}^{n-2}\left(\frac{1}{3}\right)^i+\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n-2}\left(\frac{2}{3}\right)^i+\frac{1}{16\cdot3^{n-1}}\sum_{i=0}^{n-2}\left(\frac{3}{4}\right)^i
\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-2}\left(\frac{1}{3}\right)^i=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\mathbf{\frac{3}{2}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan\theta\,d\theta=\Big[-\log\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2}$

$$\begin{aligned}I_n+I_{n+2}&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\,d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2}\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta(1+\tan^2\theta)\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta(\tan\theta)'\,d\theta\\&=\Big[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{1}{n+1}}\end{aligned}$$

(2) $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ において，$0\leqq\tan\theta\leqq 1$ であるから

$$\tan^n\theta\geqq\tan^{n+1}\theta\quad ゆえに\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n\theta\,d\theta\geqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+1}\theta\,d\theta$$

よって　$I_n\geqq I_{n+1}\quad(n=1,2,3,\cdots)$

(3) 先ず，$I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$，$I_n\geqq I_{n+1}\geqq I_{n+2}$ より

$$2I_n\geqq I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}\quad ゆえに\quad I_n\geqq\frac{1}{2(n+1)}$$

次に，$I_{n-2}+I_n=\frac{1}{n-1}$，$I_{n-2}\geqq I_{n-1}\geqq I_n$ より

$$2I_n\leqq I_{n-2}+I_n=\frac{1}{n-1}\quad ゆえに\quad I_n\leqq\frac{1}{2(n-1)}$$

したがって

$$\frac{1}{2(n+1)}\leqq I_n\leqq\frac{1}{2(n-1)}$$

$$\frac{n}{2(n+1)}\leqq nI_n\leqq\frac{n}{2(n-1)}$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n-1)}=\frac{1}{2}$ であるから，はさみうちの原理により

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{2}}$$

別解 $I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$ より　$nI_n+\frac{n}{n+2}\cdot(n+2)I_{n+2}=\frac{n}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty}nI_n=\lim_{n\to\infty}(n+2)I_{n+2}=\alpha$ とおくと，$n\longrightarrow\infty$ のとき

$$\alpha+1\cdot\alpha=1\quad よって\quad \alpha=\frac{1}{2}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 求める数列を $\{a_n\}$ とすると　$a_1 = 1$，$a_{n+1} - a_n = 2n + 2$

$n > 1$ のとき　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(2k + 2)$

ゆえに　$a_n - a_1 = 2\cdot\dfrac{1}{2}n(n-1) + 2(n-1) = n^2 + n - 2$

したがって　$a_n = n^2 + n - 1$

上式は $n = 1$ のときも成り立つ．よって　$\boldsymbol{a_n = n^2 + n - 1}$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 3\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2} = 3$

$$|\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 6\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 3^2 - 2\cdot 3 + 9\cdot 2^2 = 27$$

よって　$\boldsymbol{|\vec{a} - 3\vec{b}| = 3\sqrt{3}}$

(3) $\log_3 5 = \dfrac{\log_9 5}{\log_9 3} = \log_3 9 \log_9 5 = 2\log_9 5 = \log_9 25$

$\dfrac{1}{2} + \log_9 8 = \dfrac{1}{2}\log_9 9 + \log_9 8 = \log_9 3 + \log_9 8 = \log_9 24$

$\log_9 24 < \log_9 25 < \log_9 26$ より

$$\boldsymbol{\frac{1}{2} + \log_9 8 < \log_3 5 < \log_9 26}$$

(4) $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ より

$0 \leqq x \leqq 2$ において　$x^2 - x - 2 \leqq 0$,
$2 \leqq x \leqq 3$ において　$x^2 - x - 2 \geqq 0$

したがって

$$\begin{aligned}\int_0^3 |\,x^2 - x - 2\,|dx &= \int_0^2(-x^2 + x + 2)dx + \int_2^3(x^2 - x - 2)dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{31}{6}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 2倍角の公式により

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \mathbf{2\cos^2 \boldsymbol{x} - 1}\end{aligned}$$

加法定理により

$$\cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$$
$$\cos(2x - x) = \cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x$$

上の2式の辺々を加えると

$$\begin{aligned}\cos 3x + \cos x &= 2\cos 2x \cos x \\ &= 2(2\cos^2 x - 1)\cos x\end{aligned}$$

よって　$\cos 3x = \mathbf{4\cos^3 \boldsymbol{x} - 3\cos \boldsymbol{x}}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}f(x) &= \cos 3x + \cos 2x - 2\cos x \\ &= (4\cos^3 x - 3\cos x) + (2\cos^2 x - 1) - 2\cos x \\ &= 4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 5\cos x - 1\end{aligned}$$

$t = \cos x$，$g(t) = f(x)$ とおくと

$$g(t) = 4t^3 + 2t^2 - 5t - 1 \quad (-1 \leqq t \leqq 1)$$

$g(t)$ を微分すると　$g'(t) = 12t^2 + 4t - 5 = (6t + 5)(2t - 1)$

したがって，$g(t)$ の増減表は次のようになる．

t	-1	$\cdots$	$-\frac{5}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	2	$\nearrow$	$\frac{121}{54}$	$\searrow$	$-\frac{5}{2}$	$\nearrow$	0

よって　最大値 $\mathbf{\dfrac{121}{54}}$，最小値 $\mathbf{-\dfrac{5}{2}}$