平成 23 年度　琉球大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・農・教育学部　平成 23 年 2 月 25 日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B・C (120 分)
- 農・教育 (学校教育 [教育実践学・技術・特別支援]，生涯教育 [自然環境科学]) 学部は，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (60 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 実数 p に対して，行列 A，B，C をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1+p & -1 \end{pmatrix}$$

とおく．さらに，行列 A_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を

$$A_1 = A, \quad A_{n+1} = A_nB - BA_n + C \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．次の問いに答えよ．

(1) A_2，A_3 を求めよ．

(2) A_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を推測し，その推測が正しいことを数学的帰納法を用いて示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 中心が (2, 0, 1)，半径が $2\sqrt{5}$ の球面が yz 平面と交わってできる円を C とする．次の問いに答えよ．

(1) C の中心の座標と半径を求めよ．

(2) 点 P は C 上を動き，点 Q は xy 平面上の直線 $x = y$ 上を動くとする．線分 PQ の長さの最小値，およびそのときの P，Q の座標を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 1 から 4 までの番号を 1 つずつ書いた 4 枚のカードがある．この中から 1 枚を抜き取り，番号を記録してもとに戻す．これを n 回繰り返したとき，記録された n 個の数の最大公約数を X とする．ただし，n は 2 以上の自然数とする．次の問いに答えよ．

(1) $X = 3$ となる確率と $X = 4$ となる確率を n を用いて表せ．

(2) $X = 2$ となる確率を n を用いて表せ．

(3) X の期待値を n を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin 2x\,dx$ を求めよ．

(2) m，n が自然数のとき，定積分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx$ を求めよ．

(3) a，b を実数とする．a，b の値を変化させたときの定積分

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} (x - a\sin x - b\sin 2x)^2\,dx$$

の最小値，およびそのときの a，b の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$ の整数部分を a，小数部分を b とする．このとき，a^2+ab+b^2 と $\dfrac{1}{a-b-1} - \dfrac{1}{a+b+1}$ の値を求めよ．

(2) 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx-14=0$ の 1 つの解が $2+\sqrt{3}i$ であるとき，実数の定数 a，b の値を求めよ．

(3) 次の方程式を解け．

$$\log_5(1-4\cdot 5^x) = 2x+1$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ 放物線 $y=x^2$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ における接線が点 R で交わっている．次の問いに答えよ．

(1) R の座標を求めよ．

(2) $p=-1$，$q=2$ のとき，2 本の接線と放物線で囲まれた図形の面積を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $A_2 = AB - BA + C$ より

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1+p & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & p+p^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1+p & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1+p & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{p+p^2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$A_3 = A_2B - BA_2 + C$ より

$$
\begin{aligned}
A_3 &= \begin{pmatrix} 0 & p+p^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & p+p^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\qquad + \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1+p & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & p+2p^2+p^3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & p+p^2 \\ 1+p & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1+p & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{p+p^2+p^3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(2) $A_n = \begin{pmatrix} 0 & p+p^2+\cdots+p^n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots (*)$ と推測する．

i) $n=1$ のとき，$(*)$ は成り立つ．

ii) $n=k$ のとき

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & p+p^2+\cdots+p^k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}
A_{k+1} &= A_kB - BA_k + C \\
&= \begin{pmatrix} 0 & p+p^2+\cdots+p^k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & p+p^2+\cdots+p^k \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1+p & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & p+2p^2+\cdots+2p^k+p^{k+1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} 1 & p+p^2+\cdots+p^k \\ 1+p & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1+p & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & p+p^2+\cdots+p^{k+1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

i)，ii) より，すべての自然数 n について，$(*)$ が成り立つ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 中心 $(2,\ 0,\ 1)$，半径 $2\sqrt{5}$ の球面の方程式は

$$(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=(2\sqrt{5})^2$$

この球面と yz 平面と交わってできる円の方程式は，$x=0$ を代入して

$$(0-2)^2+y^2+(z-1)^2=20 \quad \text{ゆえに} \quad y^2+(z-1)^2=16$$

よって　**中心 $(\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \mathbf{1})$，半径 $\mathbf{4}$ の円**

(2) (1) の結果から，C 上の点 P の座標を $(0,\ 4\cos\theta,\ 4\sin\theta+1)$ とおく．
また，xy 平面上の直線 $x=y$ 上の点 Q の座標を $(t,\ t,\ 0)$ とおく．

$$\begin{aligned}
\mathrm{PQ}^2 &= t^2+(t-4\cos\theta)^2+(4\sin\theta+1)^2\\
&= 2t^2-8t\cos\theta+8\sin\theta+17\\
&= 2(t-2\cos\theta)^2-8\cos^2\theta+8\sin\theta+17\\
&= 2(t-2\cos\theta)^2+8\sin^2\theta+8\sin\theta+9\\
&= 2(t-2\cos\theta)^2+8\left(\sin\theta+\frac{1}{2}\right)^2+7
\end{aligned}$$

PQ が最小となるとき　　$t=2\cos\theta,\quad \sin\theta=-\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$t=\pm\sqrt{3}$

よって　$\mathbf{P(0,\ \pm 2\sqrt{3}, -1)}$，$\mathbf{Q(\pm\sqrt{3},\ \pm\sqrt{3},\ 0)}$ **(複号同順)** のとき，
PQ の最小値 $\boldsymbol{\sqrt{7}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $X=3$ となるは，n 回とも 3 であるから，その確率は　$\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=\boldsymbol{\dfrac{1}{4^n}}$

$X=4$ となるは，n 回とも 4 であるから，その確率は　$\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=\boldsymbol{\dfrac{1}{4^n}}$

(2) $X=3$ となるのは，n 回とも 2 または 4 である場合から，n 回とも 4 である場合を除いたものであるから，その確率は

$$\left(\frac{2}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n=\boldsymbol{\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}}$$

(3) $X=1$ の確率は，$x=2,\ 3,\ 4$ の余事象の確率であるから

$$1-\left\{\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}\right)+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{4^n}\right\}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}$$

よって，求める期待値は

$$1\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}\right)+2\cdot\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}\right)+3\cdot\frac{1}{4^n}+4\cdot\frac{1}{4^n}=\boldsymbol{1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^{n-1}}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin 2x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)' dx$$
$$= \left[-\frac{1}{2}x\cos 2x\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$
$$= -\pi + \left[\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi} = \boldsymbol{-\pi}$$

(2) $m \neq n$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\{\cos(m-n)x - \cos(m+n)\}dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x - \frac{1}{m+n}\sin(m+n)x\right]_{-\pi}^{\pi} = \mathbf{0}$$

$m = n$ のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2mx)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2m}\sin 2mx\right]_{-\pi}^{\pi} = \boldsymbol{\pi}$$

(3) $$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} x(-\cos x)'\,dx$$
$$= \left[-x\cos x\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}(-\cos x)\,dx$$
$$= 2\pi + \left[\sin x\right]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

上式および，(1)，(2) の結果を用いて

$$I = \int_{-\pi}^{\pi}(x - a\sin x - b\sin 2x)^2 dx$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx + a^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx + b^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 2x\,dx$$
$$- 2a\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx - 2b\int_{-\pi}^{\pi} x\sin 2x\,dx + 2ab\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\sin 2x\,dx$$
$$= \frac{2}{3}\pi^3 + a^2\pi + b^2\pi - 2a\cdot 2\pi - 2b\cdot(-\pi) + 2ab\cdot 0$$
$$= \pi a^2 - 4\pi a + \pi b^2 + 2\pi b + \frac{2}{3}\pi^3$$
$$= \pi(a-2)^2 + \pi(b+1)^2 + \frac{2}{3}\pi^3 - 5\pi$$

よって　$\boldsymbol{a = 2,\ b = -1}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi^3 - 5\pi}$

解説 空間のベクトル $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が，次の諸式をみたすとする．

$$|\vec{p}|^2=\frac{2}{3}\pi^3,\quad |\vec{u}|^2=|\vec{v}|^2=\pi,\quad \vec{p}\cdot\vec{u}=2\pi,\quad \vec{p}\cdot\vec{v}=-\pi,\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

ここで，P から平面 OAB に垂線 PH を下すと，定数 a_0，b_0 を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=a_0\vec{u}+b_0\vec{v}\quad \text{ゆえに}\quad \overrightarrow{\mathrm{HP}}=\vec{p}-a_0\vec{u}-b_0\vec{v}$$

となる．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{HP}}\perp\vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{HP}}\perp\vec{v}$ であるから　$a_0=2$，$b_0=-1$

平面 OAB 上の任意の点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=a\vec{u}+b\vec{v}$ とすると

$$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|\geqq|\overrightarrow{\mathrm{HP}}|$$

したがって，任意の実数 a，b に対して

$$|\vec{p}-a\vec{u}-b\vec{v}|^2\geqq|\vec{p}-2\vec{u}+\vec{v}|^2$$

すなわち　$(\vec{p}-a\vec{u}-b\vec{v})\cdot(\vec{p}-a\vec{u}-b\vec{v})\geqq(\vec{p}-2\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{p}-2\vec{u}+\vec{v})$

以上のことから，x の関数 $f_1(x)=x$，$f_2(x)=\sin x$，$f_3(x)=\sin 2x$ の内積を

$$\langle f_i(x), f_j(x)\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f_i(x)f_j(x)\,dx\quad (i,j=1,2,3)$$

と定義すると，任意の実数 a，b に対して

$$\begin{aligned}
I&=\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\sin x-b\sin 2x)^2\,dx\\
&=\langle x-a\sin x-b\sin 2x,\ x-a\sin x-b\sin 2x\rangle\\
&\geqq\langle x-2\sin x+\sin 2x,\ x-2\sin x+\sin 2x\rangle\\
&=\langle x,x\rangle+4\langle\sin x,\sin x\rangle+\langle\sin 2x,\sin 2x\rangle\\
&\qquad-4\langle x,\sin x\rangle+2\langle x,\sin 2x\rangle-4\langle\sin x,\sin 2x\rangle\\
&=\frac{2}{3}\pi^3+4\pi+\pi-4\cdot 2\pi+2(-\pi)-4\cdot 0=\frac{2}{3}\pi^3-5\pi
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1=2+(\sqrt{3}-1)$ ゆえに $a=2$，$b=\sqrt{3}-1$

したがって

$$a^2+ab+b^2=2^2+2(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}-1)^2=\mathbf{6}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-b-1}-\frac{1}{a+b+1}&=\frac{1}{2-(\sqrt{3}-1)-1}-\frac{1}{2+(\sqrt{3}-1)+1}\\&=\frac{1}{2-\sqrt{3}}-\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\mathbf{2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

(2) 実数を係数とする3次方程式の解の1つが $2+\sqrt{3}\,i$ であるから，他の解は $2-\sqrt{3}\,i$ で，これらを α，β とする．また残りの解を γ とおくと

$$\alpha+\beta=4,\quad \alpha\beta=7$$

3次方程式 $x^3+ax^2+bx-14=0$ の解と係数の関係により

$$\alpha+\beta+\gamma=-a,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b,\quad \alpha\beta\gamma=14$$

したがって

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)+\gamma&=-a & \alpha\beta+\gamma(\alpha+\beta)&=b & \alpha\beta\cdot\gamma&=14\\4+\gamma&=-a & 7+4\gamma&=b & 7\gamma&=14\end{aligned}$$

上の第3式から $\gamma=2$ これを第1式，第2式に代入すると $\boldsymbol{a=-6}$**，** $\boldsymbol{b=15}$

(3) $\log_5(1-4\cdot5^x)=2x+1$ より

$$5^{2x+1}=1-4\cdot5^x \quad ゆえに \quad 5\cdot5^{2x}+4\cdot5^x-1=0$$

$X=5^x$ とおくと $5X^2+4X-1=0$ ゆえに $(X+1)(5X-1)=0$

$X>0$ に注意して $X=\dfrac{1}{5}$ すなわち $5^x=5^{-1}$ よって $\boldsymbol{x=-1}$

$\boxed{\textbf{6}}$ (1) $y = x^2$ を微分すると　$y' = 2x$

ゆえに，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$ における接線の方程式は

$$y - p^2 = 2p(x - p) \quad \text{すなわち} \quad y = 2px - p^2 \quad \cdots ①$$

同様に，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ における接線の方程式は　$y = 2qx - q^2 \quad \cdots ②$

R の座標は，①，② を解いて　$\boldsymbol{\left(\dfrac{p+q}{2},\ pq\right)}$

(2) $p = -1$，$q = 2$ より，$y = x^2$ の P，Q における接線の方程式は，それぞれ

$$y = -2x - 1, \quad y = 4x - 4$$

また，R の x 座標は　$x = \dfrac{-1+2}{2} = \dfrac{1}{2}$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \{x^2 - (-2x - 1)\}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \{x^2 - (4x - 4)\}\,dx \\ &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (x+1)^2\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} (x-2)^2\,dx \\ &= \left[\ \frac{1}{3}(x+1)^3\ \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} + \left[\ \frac{1}{3}(x-2)^2\ \right]_{\frac{1}{2}}^{2} \\ &= \frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \boldsymbol{\frac{9}{4}} \end{aligned}$$

解説 直線 PQ と放物線で囲まれた部分の面積を S_1 とすると

$$S = \frac{1}{2}S_1$$

が成り立つ．九大 2009 年一般前期文系数学 $\boxed{\textbf{4}}$ の補足[1] を参照．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf