平成22年度　琉球大学2次試験前期日程(数学問題)
理・工・医・農・教育学部　平成22年2月25日

- 理・工・医・教育[数学]学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B・C (120分)
- 農・教育(学校教育[教育実践学・技術・特別支援]，生涯教育[自然環境科学])学部は，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数I・II・A・B (60分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して以下の問いに答えよ.

(1) $U = P^{-1}AP$ とする．U を求めよ.

(2) n を自然数とする．U^n を推測し，その結果を数学的帰納法によって証明せよ.

(3) A^n を求めよ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 3点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(3,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 2,\ 1)$ がある.

(1) z 軸上の点 C$(0,\ 0,\ m)$ から直線 AB 上の点 H におろした垂線を CH とする．このとき，点 H が線分 AB 上にあるような m の値の範囲を求めよ.

(2) 点 H が線分 AB にあるとき，垂線 CH の長さの最大値，最小値とそのときの H の座標を求めよ.

(3) 三角形 OAB に外接する円の中心 P の座標とその半径 r を求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 点 $(a,\ b)$ を通り曲線 $y = x^3 - x$ に接するような異なる3本の直線が存在するための実数 a，b が満たすべき必要十分条件を求め，それを満たす点 $(a,\ b)$ の存在する領域を図示せよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ $a > 0$ とし，$f(x) = a^2(x+1)e^{-ax}$ とおく.

(1) 関数 $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ.

(2) (1) で求めた x の値を c とする．曲線 $y = f(x)$ と x 軸，y 軸および直線 $x = c$ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする．$0 < a < 1$ における $S(a)$ の最大値とそのときの a の値を求めよ．ただし，$e > 2$ であることを証明なしに用いてよい.

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問いに答えよ．

(1) t を実数とする．放物線 $y = x(2-x)$ 上の点 $(t,\ t(2-t))$ における接線の方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた直線と放物線 $y = x(2-x)$ および 2 直線 $x = 0$，$x = 3$ とで囲まれた図形の面積を $S(t)$ とする．$0 \leqq t \leqq 2$ における $S(t)$ の最大値，最小値とそのときの t の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 次の問いに答えよ．

(1) a を実数とする．x に関する方程式 $4^x - 2^{a+x} + 2^a = 0$ が実数解を持つように a の値の範囲を求めよ．

(2) 三角形 ABC の三辺を $\mathrm{AB} = 4$，$\mathrm{AC} = 3$，$\mathrm{BC} = \sqrt{13}$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とおくとき，内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ．また，三角形 ABC の重心を G とするとき，線分 AG の長さを求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ より，$P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ であるから

$$U=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$$

(2) $U^n=\begin{pmatrix}2^n & n\cdot 2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}\cdots(*)$ とする．

i) $n=1$ のとき，$(*)$ は成り立つ．

ii) $n=k$ のとき

$$U^k=\begin{pmatrix}2^k & k\cdot 2^{k-1}\\ 0 & 2^k\end{pmatrix}$$

が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}U^{k+1}&=U^kU\\ &=\begin{pmatrix}2^k & k\cdot 2^{k-1}\\ 0 & 2^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}2^{k+1} & (k+1)\cdot 2^k\\ 0 & 2^{k+1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

したがって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

i)，ii) より，すべての自然数 n に対して，$(*)$ が成り立つ．

(3) (1) の結果から

$$\begin{aligned}U^n&=(P^{-1}AP)^n\\ &=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)\\ &=P^{-1}A^nP\end{aligned}$$

上式より $A^n=PU^nP^{-1}$ であるから

$$\begin{aligned}A^n&=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & n\cdot 2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\boldsymbol{(n+2)2^{n-1}} & \boldsymbol{n\cdot 2^{n-1}}\\ \boldsymbol{-n\cdot 2^{n-1}} & \boldsymbol{-(n-2)2^{n-1}}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

解説 2次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0 \quad \cdots(*)$$

i) $(*)$ が異なる2つの解 (固有値)α，β をもつとき，それぞれの固有値に対する固有ベクトルを $\vec{u}$，$\vec{v}$ とすると[1]($\alpha\neq\beta$ より $\vec{u}\not\parallel\vec{v}$)

$$A\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha\vec{u} & \beta\vec{v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$P=\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}$，$U=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ とおくと ($\vec{u}\not\parallel\vec{v}$ より $\det P\neq 0$)

$$AP=PU \quad \text{ゆえに} \quad A=PUP^{-1}$$

$A^n=(PUP^{-1})^n=PU^nP^{-1}$ であるから

$$A^n=P\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

ii) $(*)$ が重解 α をもつとき，固有値 α に対する固有ベクトルでない任意のベクトル $\vec{v}\neq\vec{0}$ に対して

$$\vec{u}=(A-\alpha E)\vec{v} \quad \cdots ①$$

とおくと，$(A-\alpha E)^2=O$ であるから

$$\begin{aligned} A\vec{u}&=A(A-\alpha E)\vec{v} \\ &=\{(A-\alpha E)^2+\alpha(A-\alpha E)\}\vec{v} \\ &=\alpha(A-\alpha E)\vec{v}=\alpha\vec{u} \quad \cdots ② \end{aligned}$$

①，② から　$A\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha\vec{u} & \vec{u}+\alpha\vec{v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

$P=\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}$ とおくと，i) と同様にして

$$A^n=P\begin{pmatrix} \alpha^n & n{\cdot}\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 2,\ 1)-(3,\ 0,\ 0)=(-2,\ 2,\ 1)$

点 H が線分 AB 上にあるとき，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}=k(-2,\ 2,\ 1)\quad(0\leqq k\leqq 1)$$

とおける．したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}\\&=(3,\ 0,\ 0)+k(-2,\ 2,\ 1)\\&=(-2k+3,\ 2k,\ k)\quad\cdots①\\\overrightarrow{\mathrm{CH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=(-2k+3,\ 2k,\ k)-(0,\ 0,\ m)\\&=(-2k+3,\ 2k,\ k-m)\quad\cdots②\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}}=0$ より

$$-2(-2k+3)+2\cdot 2k+1\cdot(k-m)=0$$

したがって　$m=9k-6\quad\cdots③$

$0\leqq k\leqq 1$ であるから　$\boldsymbol{-6\leqq m\leqq 3}$

(2) ③ を ② に代入すると　$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=(-2k+3,\ 2k,-8k+6)$

したがって
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2&=(-2k+3)^2+(2k)^2+(-8k+6)^2\\&=72k^2-108k+45\\&=72\left(k-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{2}\end{aligned}$$

上式および ① により，$0\leqq k\leqq 1$ において，$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|$ は

$k=0$　すなわち　$\mathbf{H(3,\ 0,\ 0)}$ のとき　**最大値** $\boldsymbol{3\sqrt{5}}$,

$k=\dfrac{3}{4}$　すなわち　$\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{4}}\right)$ のとき　**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$

(3) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(3,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ 2,\ 1)$ とおくと

$$|\vec{a}|^2=9,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=3,\quad |\vec{b}|^2=6$$

P は平面 OAB 上にあるから，実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{a}+t\vec{b}\quad\cdots④$$

とおける．OA，OB の中点をそれぞれ M，N とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=s\vec{a}+t\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{NP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{ON}}=s\vec{a}+t\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{b}$$

したがって
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MP}}&=\vec{a}\cdot\left(s\vec{a}+t\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\\&=s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{2}|\vec{a}|^2\\&=9s+3t-\frac{9}{2}=\frac{3}{2}(6s+2t-3)\\\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NP}}&=\vec{b}\cdot\left(s\vec{a}+t\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)\\&=s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2-\frac{1}{2}|\vec{b}|^2\\&=3s+6t-3=3(s+2t-1)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{MP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{NP}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MP}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NP}}=0$ より

$$6s+2t-3=0,\quad s+2t-1=0$$

これを解いて　$s=\dfrac{2}{5}$，$t=\dfrac{3}{10}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{3}{10}\vec{b}=\dfrac{2}{5}(3,\ 0,\ 0)+\dfrac{3}{10}(1,\ 2,\ 1)=\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{3}{10}\right)$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{10}\right)^2=\frac{27}{10}$$

よって　$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{3}{2}},\ \boldsymbol{\dfrac{3}{5}},\ \boldsymbol{\dfrac{3}{10}}\right)$，　$r=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{\dfrac{27}{10}}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{30}}{10}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $y=x^3-x$ を微分すると　$y'=3x^2-1$

曲線 $y=x^3-x$ 上の点 $(t,\ t^3-t)$ における接線の方程式は

$$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)$$

これが点 $(a,\ b)$ を通るから

$$b-(t^3-t)=(3t^2-1)(a-t)\quad \text{ゆえに}\quad 2t^3-3at^2+a+b=0\quad \cdots(*)$$

$f(t)=2t^3-3at^2+a+b$ とおくと　$f'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$

$f'(t)=0$ とすると，$t=0,\ a$ であるから，極値は

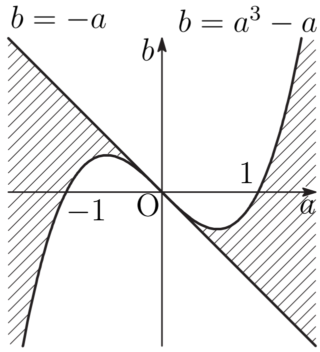
$$f(0)=a+b,\quad f(a)=-a^3+a+b$$

t の 3 次方程式 $(*)$ が異なる 3 つの実数解をもつとき，関数 $f(t)$ は，符号違いの極値をもつので

$$\begin{cases} a+b>0 \\ -a^3+a+b<0 \end{cases}$$

または $$\begin{cases} a+b<0 \\ -a^3+a+b>0 \end{cases}$$

$(a,\ b)$ の表す領域は右の図の斜線部分で，境界線を含まない．



解説 3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ について

$$D_1=b^2-3ac,\quad D_2=2b^3-9abc+27a^2d$$

とおくと，この方程式が異なる 3 つの実数解をもつのは,

$$D_1>0,\quad |D_2|<2{D_1}^{\frac{3}{2}}$$

をみたすときである[2]．3 次方程式 $2t^3-3at^2+a+b=0$ について

$$D_1=9a^2>0,\quad D_2=-54a^3+108(a+b)$$

$|D_2|<2{D_1}^{\frac{3}{2}}$ より

$$\begin{aligned} |-54a^3+108(a+b)| &< 2(9a^2)^{\frac{3}{2}} \\ -|a|^3<-a^3+2(a+b) &< |a|^3 \\ \frac{a^3-|a|^3}{2}-a<b &< \frac{a^3+|a|^3}{2}-a \end{aligned}$$

[2]http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2010.pdf の $\boxed{1}$ の解説を参照.

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=a^2(x+1)e^{-ax}$ を微分すると

$$f'(x)=a^2\{e^{-ax}+(x+1)(-a)e^{-ax}\}$$
$$=-a^2(ax+a-1)e^{-ax}$$

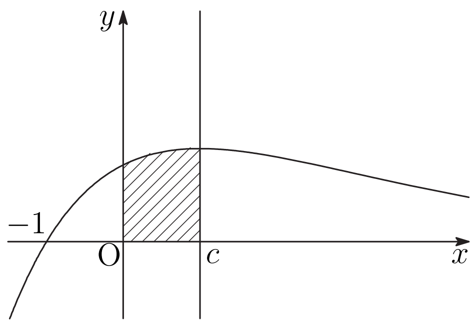
$f'(x)=0$ とすると　$x=\dfrac{1-a}{a}$

$f(x)$ の増減表は，右のようになる．

x	$\cdots$	$\frac{1-a}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	ae^{a-1}	$\searrow$

よって　$\boldsymbol{x=\dfrac{1-a}{a}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{ae^{a-1}}$

(2) (1) の結果から，$c=\dfrac{1-a}{a}$



$$S(a)=\int_0^c f(x)\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{1-a}{a}} a^2(x+1)e^{-ax}\,dx$$
$$=\left[-(ax+a+1)e^{-ax}\right]_0^{\frac{1-a}{a}}$$
$$=-2e^{a-1}+a+1$$

$S(a)$ を微分すると　$S'(a)=-2e^{a-1}+1$

$S'(a)=0$ とすると

$$e^{a-1}=\frac{1}{2}\quad すなわち\quad a=1-\log 2$$

a	$\cdots$	$1-\log 2$	$\cdots$
$S'(a)$	$+$	0	$-$
$S(a)$	$\nearrow$	最大	$\searrow$

$S(a)$ の増減表は，右のようになるから，$S(a)$ の最大値は，上の 2 式から

$$S(1-\log 2)=-2\cdot\frac{1}{2}+(1-\log 2)+1=1-\log 2$$

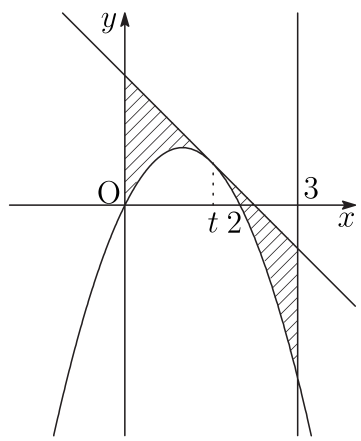
よって　$\boldsymbol{a=1-\log 2}$ のとき最大値 $\boldsymbol{1-\log 2}$

$\boxed{5}$ (1) $y=x(2-x)$ を微分すると　$y'=2-2x$

この曲線上の点 $(t,\ t(2-t))$ における接線の方程式は

$$y-t(2-t)=(2-2t)(x-t)\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{y=2(1-t)x+t^2}$$

(2) (1) の結果および右の図から



$$\begin{aligned}S(t)&=\int_0^3\{2(1-t)x+t^2-x(2-x)\}dx\\&=\int_0^3(x-t)^2\,dx\\&=\left[\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_0^3=\frac{1}{3}(3-t)^3+\frac{1}{3}t^3\\&=3t^2-9t+9=3\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{t=0}$ のとき**最大値** $\boldsymbol{9}$，$\boldsymbol{t=\dfrac{3}{2}}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{9}{4}}$

$\boxed{6}$ (1) 与えられた方程式から　　$(2^x)^2-2^a2^x+2^a=0$

$X=2^x$ とおくと　　$X^2-2^aX+2^a=0\quad\cdots(*)$

$(*)$ の解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=2^a>0,\quad \alpha\beta=2^a>0$$

$(*)$ の判別式を D とすると

$$D=(2^a)^2-4\cdot2^a=2^a(2^a-4)$$

$D\geqq0$，すなわち，$2^a-4\geqq0$ のとき，$(*)$ は正の実数解をもつ．

このとき，与えられた方程式は，実数解をもつ．

よって，$2^a-4\geqq0$ を解いて　$\boldsymbol{a\geqq2}$

(2) △ABC に余弦定理を適用すると

$$\cos A = \frac{3^2 + 4^2 - (\sqrt{13})}{2{\cdot}3{\cdot}4} = \frac{1}{2}$$

よって　$\vec{b}{\cdot}\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos A = 4{\cdot}3{\cdot}\frac{1}{2} = \mathbf{6}$

BC の中点を M とすると　$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$

また　$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c})$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{AG}}| = \frac{1}{3}|\vec{b} + \vec{c}| = \frac{1}{3}\sqrt{|\vec{b}|^2 + 2\vec{b}{\cdot}\vec{c} + |\vec{c}|^2}$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{4^2 + 2{\cdot}6 + 3^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{37}}{3}}$$