平成21年度　琉球大学2次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・農・教育学部　平成21年2月25日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B・C (120分)
- 農・教育 (学校教育 [教育実践学A・技術・特別支援]，生涯教育 [自然環境科学]) 学部は，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (60分)

$\boxed{\textbf{1}}$ 座標平面上の x 軸の正の部分にある点 A と y 軸の正の部分にある点 B を考える．原点 O から点 A，B を通る直線 l におろした垂線と，直線 l との交点を P とする．$\mathrm{OP}=1$ であるように点 A，B が動くとき，次の問に答えよ．

(1) $\theta=\angle\mathrm{AOP}$ とするとき，$\mathrm{OA}+\mathrm{OB}-\mathrm{AB}$ を $\cos\theta$ と $\sin\theta$ で表せ．

(2) $\mathrm{OA}+\mathrm{OB}-\mathrm{AB}$ の最小値を求めよ．

$\boxed{\textbf{2}}$ $a>0$ とし，$f(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos ax|\,dx$ とする．次の問に答えよ．

(1) $0<a<1$ のとき，$f(a)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to+0}f(a)$ を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，$f(n)$ を求めよ．

$\boxed{\textbf{3}}$ n を2以上の自然数とする．次の問に答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_1^n x\log x\,dx$ を求めよ．

(2) 次の不等式を証明せよ．

$$\frac{1}{2}n^2\log n-\frac{1}{4}(n^2-1)<\sum_{k=1}^{n}k\log k<\frac{1}{2}n^2\log n-\frac{1}{4}(n^2-1)+n\log n$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{(1^2\cdot 2^2\cdot 3^3\cdots n^n)^{\frac{1}{n^2\log n}}\right\}$ を求めよ．

4 1個のサイコロを投げ，座標平面内の原点Oから出発する点Pを，次の規則に従って動かすとする．

- 出たサイコロの目が1ならば，x 軸の正の向きに1動かす．
- 出たサイコロの目が2ならば，x 軸の負の向きに1動かす．
- 出たサイコロの目が3ならば，y 軸の正の向きに1動かす．
- 出たサイコロの目が4ならば，y 軸の負の向きに1動かす．
- 出たサイコロの目が5か6ならば，動かさない．

このとき，次の問に答えよ．

(1) 3回サイコロを投げるとき，$\mathrm{OP}=1$ となる確率を求めよ．

(2) 7回サイコロを投げるとき，$\mathrm{OP}=5$ となる確率を求めよ．

5 次の問に答えよ．

(1) $a \geqq 0$，$b \geqq 0$ のとき，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ となることを証明せよ．

(2) a，b を実数とする．x の方程式 $x^2+ax+4=0$ が解 $-1+bi$ をもつとき，a，b の値を求めよ．ただし，i は虚数単位とする．

(3) $0<a<1$ とする．このとき，x の不等式 $\log_a(x-1) \geqq \log_{a^2}(x+11)$ を解け．

6 次の問に答えよ．

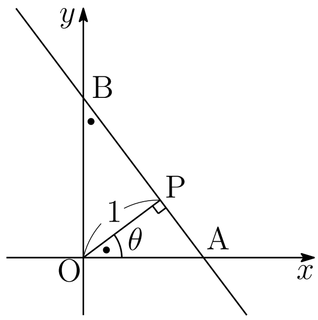
(1) 次の等式が成り立つことを示せ．

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(2) 放物線 $y=x^2+px+q$ を C_1 とし，放物線 $y=-x^2$ を C_2 とする．C_1 は直線 $y=2x$ 上に頂点をもち，C_2 と相異なる2点で交わるとする．C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積が最大となる実数 p，q の値と，そのときの面積を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 右の図から



$$\mathrm{OA} = \frac{\mathrm{OP}}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta}$$
$$\mathrm{OB} = \frac{\mathrm{OP}}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta}$$
$$\mathrm{AB} = \frac{\mathrm{OB}}{\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{OA}+\mathrm{OB}-\mathrm{AB} = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}
\mathrm{OA}+\mathrm{OB}-\mathrm{AB} &= \frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2(\sin\theta+\cos\theta-1)}{2\sin\theta\cos\theta} \\
&= \frac{2(\sin\theta+\cos\theta-1)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1} \\
&= \frac{2(\sin\theta+\cos\theta-1)}{(\sin\theta+\cos\theta+1)(\sin\theta+\cos\theta-1)} \\
&= \frac{2}{\sin\theta+\cos\theta+1} = \frac{2}{\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+1}
\end{aligned}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{2}{\sqrt{2}+1} = \mathbf{2(\sqrt{2}-1)}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $0 < a < 1$ のとき，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$\cos ax > 0$ であるから

$$f(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos ax\,dx = \left[\,\frac{1}{a}\sin ax\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{a}\sin\frac{\pi a}{2}}$$

(2) (1) の結果を利用すると

$$\lim_{a\to+0} f(a) = \lim_{a\to+0}\frac{1}{a}\sin\frac{\pi a}{2} = \lim_{a\to+0}\frac{\sin\dfrac{\pi a}{2}}{\dfrac{\pi a}{2}}\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

(3) $f(n) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos nx|\,dx$ について，$t = nx$ とおくと

$$\frac{dt}{dx} = n,$$

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$0 \longrightarrow \frac{n}{2}\pi$

したがって　　$f(n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\frac{n}{2}\pi} |\cos t|\,dt = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{2}\pi}^{\frac{k}{2}\pi} |\cos t|\,dt$

$k = 1, 2, \cdots, n$ について，$\displaystyle\int_{\frac{k-1}{2}\pi}^{\frac{k}{2}\pi} |\cos t|\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\,dt$ であるから

$$\begin{aligned}
f(n) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\,dt \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big[\,\sin t\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} = \frac{1}{n}\cdot n = \mathbf{1}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\displaystyle\int_1^n x\log x\,dx=\int_1^n\left(\frac{x^2}{2}\right)'\log x\,dx=\left[\ \frac{x^2}{2}\log x\ \right]_1^n-\int_1^n\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$$=\frac{1}{2}n^2\log n-\left[\ \frac{x^2}{4}\ \right]_1^n=\boldsymbol{\frac{1}{2}n^2\log n-\frac{1}{4}(n^2-1)}$$

(2) $f(x)=x\log x$ とおくと　$f'(x)=\log x+1$

$x\geqq 1$ において，$f(x)$ は単調増加であるから

$$\begin{aligned}\int_1^n x\log x\,dx&=\sum_{k=2}^n\int_{k-1}^k x\log x\,dx\\&<\sum_{k=2}^n k\log k=\sum_{k=1}^n k\log k,\\ \sum_{k=1}^n k\log k&=\sum_{k=1}^{n-1}k\log k+n\log n\\&<\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}x\log x\,dx+n\log n\\&=\int_1^n x\log x\,dx+n\log n\end{aligned}$$

上の 2 式から　$\displaystyle\int_1^n x\log x\,dx<\sum_{k=1}^n k\log k<\int_1^n x\log x\,dx+n\log n$

これに (1) の結果を代入すると

$$\frac{1}{2}n^2\log n-\frac{1}{4}(n^2-1)<\sum_{k=1}^n k\log k<\frac{1}{2}n^2\log n-\frac{1}{4}(n^2-1)+n\log n$$

(3) (2) の結果から

$$\frac{1}{2}-\frac{n^2-1}{4n^2\log n}<\frac{1}{n^2\log n}\sum_{k=1}^n\log k^k<\frac{1}{2}-\frac{n^2-1}{4n^2\log n}+\frac{1}{n}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{n^2-1}{4n^2\log n}\right)=\frac{1}{2}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{n^2-1}{4n^2\log n}+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$ であるから，

はさみうちの原理より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2\log n}\sum_{k=1}^n\log k^k=\frac{1}{2}$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{(1^2\cdot 2^2\cdot 3^3\cdots n^n)^{\frac{1}{n^2\log n}}\right\}=\boldsymbol{\sqrt{e}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $X=\{1,2\},\ Y=\{3,\ 4\},\ Z=\{5,6\},\ x\in X,\ y\in Y,\ z_1,z_2\in Z,$
$a\in X\cup Y$ とすると，$\mathrm{OP}=1$ となる目の組合せは，

$$\{1,\ 2,\ x\},\ \{1,\ 2,\ y\},\ \{3,\ 4,\ x\},\ \{3,\ 4,\ y\},\ \{a,\ z_1,\ z_2\}$$

これらの場合の数は，それぞれ

$$\frac{3!}{2!}\times 2,\quad 3!\times 2,\quad 3!\times 2,\quad \frac{3!}{2!}\times 2,\quad \left(3!+\frac{3!}{2!}\times 2\right)\times 4$$

よって，求める確率は $\dfrac{6+12+12+6+48}{6^3}=\mathbf{\dfrac{7}{18}}$

(2) $\mathrm{OP}=5$ となる目の組合せは，

$$\{1,\ 2,\ x,\ x,\ x,\ x,\ x\},\ \{1,\ 2,\ y,\ y,\ y,\ y,\ y\},\ \{3,\ 4,\ x,\ x,\ x,\ x,\ x\},$$
$$\{3,\ 4,\ y,\ y,\ y,\ y,\ y\},\ \{x,\ x,\ x,\ x,\ y,\ y,\ y\},\ \{x,\ x,\ x,\ y,\ y,\ y,\ y\}$$
$$\{a,\ a,\ a,\ a,\ a,\ z_1,\ z_2\}$$

これらの場合の数は，それぞれ

$$\begin{array}{lll} \dfrac{7!}{6!}\times 2, & \dfrac{7!}{5!}\times 2, & \dfrac{7!}{5!}\times 2, \\ \dfrac{7!}{6!}\times 2, & \dfrac{7!}{4!3!}\times 2^2, & \dfrac{7!}{3!4!}\times 2^2, \\ \multicolumn{3}{l}{\left(\dfrac{7!}{5!}+\dfrac{7!}{5!2!}\times 2\right)\times 4} \end{array}$$

よって，求める確率は

$$\frac{7\cdot 2+7\cdot 12+7\cdot 12+7\cdot 2+7\cdot 20+7\cdot 20+7\cdot 48}{6^7}$$
$$=\frac{7\cdot 116}{6^7}=\frac{7\cdot 2^2\cdot 29}{2^7\cdot 3^7}=\mathbf{\frac{7\cdot 29}{2^5\cdot 3^7}}\quad \left(=\mathbf{\frac{203}{69984}}\right)$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $a \geqq 0$，$b \geqq 0$ より

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqq 0$$

よって，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ が成り立つ．

(2) 実数を係数とする 2 次方程式 $x^2 + ax + 4 = 0$ が $-1 + bi$ を解にもつとき，これと共役な複素数 $-1 - bi$ も解にもつので，解と係数の関係により

$$(-1+bi) + (-1-bi) = -a, \quad (-1+bi)(-1-bi) = 4$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = 2}$，$\boldsymbol{b = \pm\sqrt{3}}$

(3) x の不等式 $\log_a(x-1) \geqq \log_{a^2}(x+11)$ の真数は正であるから

$$x - 1 > 0 \text{ かつ } x + 11 > 0 \quad \text{すなわち} \quad x > 1 \quad \cdots①$$

$\log_a(x-1) = \log_{a^2}(x-1)^2$ であるから，与えられた不等式は

$$\log_{a^2}(x-1)^2 \geqq \log_{a^2}(x+11)$$

$0 < a < 1$ より，$0 < a^2 < 1$ であるから

$$(x-1)^2 \leqq x + 11 \quad \text{ゆえに} \quad (x+2)(x-5) \leqq 0$$

① に注意して，これを解くと　　$\boldsymbol{1 < x \leqq 5}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1)

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\,dx$$
$$= \int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx$$
$$= \left[\ \frac{1}{3}(x-\alpha)^3 - \frac{\beta-\alpha}{2}(x-\alpha)^2\ \right]_\alpha^\beta$$
$$= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3 = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(2)

$$y = x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4}+q$$

放物線 C_1 の頂点 $\left(-\frac{p}{2}, -\frac{p^2}{4}+q\right)$ が直線 $y=2x$ 上にあるから

$$-\frac{p^2}{4}+q = 2\left(-\frac{2}{p}\right) \quad \text{ゆえに} \quad q = \frac{p^2}{4}-p \quad \cdots ①$$

$C_1 : y = x^2+px+\frac{p^2}{4}-p$，$C_2 : y=-x^2$ から y を消去すると

$$2x^2+px+\frac{p^2}{4}-p=0 \quad \cdots (*)$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D = p^2 - 4\cdot 2\left(\frac{p^2}{4}-p\right) = -p^2+8p$$

C_1，C_2 が相異なる 2 点で交わるとき，$D>0$ であるから

$$-p^2+8p>0 \quad \text{これを解いて} \quad 0<p<8 \quad \cdots ②$$

方程式 $(*)$ の 2 つの解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\beta-\alpha = \frac{\sqrt{D}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{-p^2+8p} = \frac{1}{2}\sqrt{-(p-4)^2+16}$$

①，② より，$\beta-\alpha$ は $p=4$，$q=0$ のとき，$\beta-\alpha$ は最大値 2 をとる．

C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を S とすると，(1) の結果により

$$S = \int_\alpha^\beta \left\{-x^2-\left(x^2+px+q\right)\right\}dx$$
$$= -2\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$$

よって，$\boldsymbol{p=4}$，$\boldsymbol{q=0}$ のとき，S は最大値 $\mathbf{\frac{8}{3}}$ をとる．