

平成 21 年度 琉球大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

理・工・医・農・教育学部 平成 21 年 2 月 25 日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部 [1] [2] [3] [4] 数 I・II・III・A・B・C (120 分)
- 農・教育 (学校教育 [教育実践学 A・技術・特別支援], 生涯教育 [自然環境科学]) 学部 [5] [6] 数 I・II・A・B (60 分)

[1] 座標平面上の x 軸の正の部分にある点 A と y 軸の正の部分にある点 B を考える. 原点 O から点 A, B を通る直線 l におろした垂線と, 直線 l との交点を P とする. $OP = 1$ であるように点 A, B が動くとき, 次の間に答えよ.

- (1) $\theta = \angle AOP$ とするとき, $OA + OB - AB$ を $\cos \theta$ と $\sin \theta$ で表せ.
- (2) $OA + OB - AB$ の最小値を求めよ.

[2] $a > 0$ とし, $f(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos ax| dx$ とする. 次の間に答えよ.

- (1) $0 < a < 1$ のとき, $f(a)$ を求めよ.
- (2) $\lim_{a \rightarrow +0} f(a)$ を求めよ.
- (3) 自然数 n に対して, $f(n)$ を求めよ.

[3] n を 2 以上の自然数とする. 次の間に答えよ.

- (1) 定積分 $\int_1^n x \log x dx$ を求めよ.
- (2) 次の不等式を証明せよ.

$$\frac{1}{2}n^2 \log n - \frac{1}{4}(n^2 - 1) < \sum_{k=1}^n k \log k < \frac{1}{2}n^2 \log n - \frac{1}{4}(n^2 - 1) + n \log n$$

- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n)^{\frac{1}{n^2 \log n}} \right\}$ を求めよ.

4 1個のサイコロを投げ、座標平面内の原点 O から出発する点 P を、次の規則に従って動かすとする。

- 出たサイコロの目が1ならば、 x 軸の正の向きに1動かす。
- 出たサイコロの目が2ならば、 x 軸の負の向きに1動かす。
- 出たサイコロの目が3ならば、 y 軸の正の向きに1動かす。
- 出たサイコロの目が4ならば、 y 軸の負の向きに1動かす。
- 出たサイコロの目が5か6ならば、動かさない。

このとき、次の問に答えよ。

- (1) 3回サイコロを投げるとき、 $OP = 1$ となる確率を求めよ。
- (2) 7回サイコロを投げるとき、 $OP = 5$ となる確率を求めよ。

5 次の問に答えよ。

- (1) $a \geq 0, b \geq 0$ のとき、 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ となることを証明せよ。
- (2) a, b を実数とする。 x の方程式 $x^2 + ax + 4 = 0$ が解 $-1 + bi$ をもつとき、 a, b の値を求めよ。ただし、 i は虚数単位とする。
- (3) $0 < a < 1$ とする。このとき、 x の不等式 $\log_a(x-1) \geq \log_{a^2}(x+11)$ を解け。

6 次の問に答えよ。

- (1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

- (2) 放物線 $y = x^2 + px + q$ を C_1 とし、放物線 $y = -x^2$ を C_2 とする。 C_1 は直線 $y = 2x$ 上に頂点をもち、 C_2 と相異なる2点で交わるとする。 C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積が最大となる実数 p, q の値と、そのときの面積を求めよ。

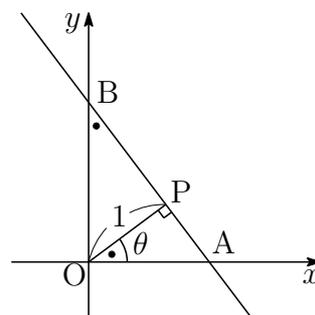
解答例

1 (1) 右の図から

$$OA = \frac{OP}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$OB = \frac{OP}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$AB = \frac{OB}{\cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$$



よって $OA + OB - AB = \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} OA + OB - AB &= \frac{\sin \theta + \cos \theta - 1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{2(\sin \theta + \cos \theta - 1)}{2 \sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{2(\sin \theta + \cos \theta - 1)}{(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1} \\ &= \frac{2(\sin \theta + \cos \theta - 1)}{(\sin \theta + \cos \theta + 1)(\sin \theta + \cos \theta - 1)} \\ &= \frac{2}{\sin \theta + \cos \theta + 1} = \frac{2}{\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) + 1} \end{aligned}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき最小値 $\frac{2}{\sqrt{2} + 1} = 2(\sqrt{2} - 1)$ をとる. ■

2 (1) $0 < a < 1$ のとき, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において, $\cos ax > 0$ であるから

$$f(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos ax \, dx = \left[\frac{1}{a} \sin ax \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{a} \sin \frac{\pi a}{2}$$

(2) (1) の結果を利用すると

$$\lim_{a \rightarrow +0} f(a) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{a} \sin \frac{\pi a}{2} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{\sin \frac{\pi a}{2}}{\frac{\pi a}{2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

(3) $f(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos nx| \, dx$ について, $t = nx$ とおくと

$$\frac{dt}{dx} = n, \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0 \rightarrow \frac{n}{2}\pi \end{array}$$

したがって $f(n) = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{n}{2}\pi} |\cos t| \, dt = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{2}\pi}^{\frac{k}{2}\pi} |\cos t| \, dt$

$k = 1, 2, \dots, n$ について, $\int_{\frac{k-1}{2}\pi}^{\frac{k}{2}\pi} |\cos t| \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \, dt$ であるから

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \, dt \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[\sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n = \frac{1}{n} \cdot n = 1 \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned} \text{[3]} \quad (1) \quad \int_1^n x \log x \, dx &= \int_1^n \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \log x\right]_1^n - \int_1^n \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{1}{2}n^2 \log n - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^n = \frac{1}{2}n^2 \log n - \frac{1}{4}(n^2 - 1) \end{aligned}$$

$$(2) \quad f(x) = x \log x \text{ とおくと } f'(x) = \log x + 1$$

$x \geq 1$ において、 $f(x)$ は単調増加であるから

$$\begin{aligned} \int_1^n x \log x \, dx &= \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k x \log x \, dx \\ &< \sum_{k=2}^n k \log k = \sum_{k=1}^n k \log k, \\ \sum_{k=1}^n k \log k &= \sum_{k=1}^{n-1} k \log k + n \log n \\ &< \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} x \log x \, dx + n \log n \\ &= \int_1^n x \log x \, dx + n \log n \end{aligned}$$

$$\text{上の2式から} \quad \int_1^n x \log x \, dx < \sum_{k=1}^n k \log k < \int_1^n x \log x \, dx + n \log n$$

これに(1)の結果を代入すると

$$\frac{1}{2}n^2 \log n - \frac{1}{4}(n^2 - 1) < \sum_{k=1}^n k \log k < \frac{1}{2}n^2 \log n - \frac{1}{4}(n^2 - 1) + n \log n$$

(3) (2)の結果から

$$\frac{1}{2} - \frac{n^2 - 1}{4n^2 \log n} < \frac{1}{n^2 \log n} \sum_{k=1}^n \log k^k < \frac{1}{2} - \frac{n^2 - 1}{4n^2 \log n} + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{n^2 - 1}{4n^2 \log n} \right) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{n^2 - 1}{4n^2 \log n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} \text{ であるから,}$$

$$\text{はさみうちの原理より} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 \log n} \sum_{k=1}^n \log k^k = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n)^{\frac{1}{n^2 \log n}} \right\} = \sqrt{e} \quad \blacksquare$$

- 4 (1) $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 4\}$, $Z = \{5, 6\}$, $x \in X$, $y \in Y$, $z_1, z_2 \in Z$,
 $a \in X \cup Y$ とすると, $OP = 1$ となる目の組合せは,

$$\{1, 2, x\}, \{1, 2, y\}, \{3, 4, x\}, \{3, 4, y\}, \{a, z_1, z_2\}$$

これらの場合の数は, それぞれ

$$\frac{3!}{2!} \times 2, \quad 3! \times 2, \quad 3! \times 2, \quad \frac{3!}{2!} \times 2, \quad \left(3! + \frac{3!}{2!} \times 2\right) \times 4$$

よって, 求める確率は $\frac{6 + 12 + 12 + 6 + 48}{6^3} = \frac{7}{18}$

- (2) $OP = 5$ となる目の組合せは,

$$\begin{aligned} &\{1, 2, x, x, x, x, x\}, \{1, 2, y, y, y, y, y\}, \{3, 4, x, x, x, x, x\}, \\ &\{3, 4, y, y, y, y, y\}, \{x, x, x, x, y, y, y\}, \{x, x, x, y, y, y, y\} \\ &\{a, a, a, a, a, z_1, z_2\} \end{aligned}$$

これらの場合の数は, それぞれ

$$\begin{aligned} &\frac{7!}{6!} \times 2, \quad \frac{7!}{5!} \times 2, \quad \frac{7!}{5!} \times 2, \\ &\frac{7!}{6!} \times 2, \quad \frac{7!}{4!3!} \times 2^2, \quad \frac{7!}{3!4!} \times 2^2, \\ &\left(\frac{7!}{5!} + \frac{7!}{5!2!} \times 2\right) \times 4 \end{aligned}$$

よって, 求める確率は

$$\begin{aligned} &\frac{7 \cdot 2 + 7 \cdot 12 + 7 \cdot 12 + 7 \cdot 2 + 7 \cdot 20 + 7 \cdot 20 + 7 \cdot 48}{6^7} \\ &= \frac{7 \cdot 116}{6^7} = \frac{7 \cdot 2^2 \cdot 29}{2^7 \cdot 3^7} = \frac{7 \cdot 29}{2^5 \cdot 3^7} \quad \left(= \frac{203}{69984}\right) \end{aligned}$$



5 (1) $a \geq 0, b \geq 0$ より

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

よって、 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ が成り立つ。

(2) 実数を係数とする2次方程式 $x^2 + ax + 4 = 0$ が $-1 + bi$ を解にもつとき、これと共役な複素数 $-1 - bi$ も解にもつので、解と係数の関係により

$$(-1 + bi) + (-1 - bi) = -a, \quad (-1 + bi)(-1 - bi) = 4$$

これを解いて $a = 2, b = \pm\sqrt{3}$

(3) x の不等式 $\log_a(x-1) \geq \log_{a^2}(x+11)$ の真数は正であるから

$$x-1 > 0 \text{ かつ } x+11 > 0 \text{ すなわち } x > 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$\log_a(x-1) = \log_{a^2}(x-1)^2$ であるから、与えられた不等式は

$$\log_{a^2}(x-1)^2 \geq \log_{a^2}(x+11)$$

$0 < a < 1$ より、 $0 < a^2 < 1$ であるから

$$(x-1)^2 \leq x+11 \quad \text{ゆえに} \quad (x+2)(x-5) \leq 0$$

①に注意して、これを解くと $1 < x \leq 5$ ■

$$\begin{aligned}
 \text{[6]} \quad (1) \quad \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx &= \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)\{(x - \alpha) - (\beta - \alpha)\} dx \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(x - \alpha)^2 - (\beta - \alpha)(x - \alpha)\} dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3 - \frac{\beta - \alpha}{2}(x - \alpha)^2 \right]_{\alpha}^{\beta} \\
 &= \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 - \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^3 = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad y = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q$$

放物線 C_1 の頂点 $\left(-\frac{p}{2}, -\frac{p^2}{4} + q\right)$ が直線 $y = 2x$ 上にあるから

$$-\frac{p^2}{4} + q = 2\left(-\frac{2}{p}\right) \quad \text{ゆえに} \quad q = \frac{p^2}{4} - p \quad \dots \text{①}$$

$C_1: y = x^2 + px + \frac{p^2}{4} - p$, $C_2: y = -x^2$ から y を消去すると

$$2x^2 + px + \frac{p^2}{4} - p = 0 \quad \dots (*)$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D = p^2 - 4 \cdot 2 \left(\frac{p^2}{4} - p\right) = -p^2 + 8p$$

C_1, C_2 が相異なる 2 点で交わる時, $D > 0$ であるから

$$-p^2 + 8p > 0 \quad \text{これを解いて} \quad 0 < p < 8 \quad \dots \text{②}$$

方程式 (*) の 2 つの解を α, β とすると ($\alpha < \beta$)

$$\beta - \alpha = \frac{\sqrt{D}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{-p^2 + 8p} = \frac{1}{2}\sqrt{-(p - 4)^2 + 16}$$

①, ② より, $\beta - \alpha$ は $p = 4, q = 0$ のとき, $\beta - \alpha$ は最大値 2 をとる.

C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を S とすると, (1) の結果により

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{-x^2 - (x^2 + px + q)\} dx \\
 &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3
 \end{aligned}$$

よって, $p = 4, q = 0$ のとき, S は最大値 $\frac{8}{3}$ をとる. ■