平成20年度　琉球大学2次試験前期日程(数学問題)
理・工・医・農・教育学部　平成20年2月25日

- 理・工・医・教育[数学]学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B・C (120分)
- 農・教育[理科教育・技術教育・学校心理学・児童教育・生涯教育・情報教育コース・教育カウンセリングA群]学部は，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数I・II・A・B (60分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} a & 2a \\ a-3 & a-4 \end{pmatrix}$ は，$A^2=O$ を満たす．ただし，O は零行列である．

(1) a の値を求めよ．

(2) $B=2E+A$ とおく．ただし，E は単位行列である．自然数 n に対して，B^n を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ で表される曲線を C とする．

(1) 曲線 C の凹凸を調べ，その概形を図示せよ．

(2) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ $(0<a<1)$ における接線 l の x 切片，y 切片をそれぞれ a を用いて表せ．

(3) (2) において点 P が曲線 C 上を動くとき，P における接線 l と x 軸および y 軸で囲まれた図形を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積の最大値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ O を原点とする座標空間内に n 個の点 $\mathrm{P}_k\left(\dfrac{k}{n},\ 2-\dfrac{k}{n},\ 0\right)$ $(k=1,2,\cdots,n)$ をとる．また，z 軸上に点 Q_k を，線分 $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ の長さが2になるようにとる．ただし，Q_k の z 座標は正とする．

(1) 三角形 $\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}$ の面積を求めよ．ただし，$1\leqq k\leqq n-1$ とする．

(2) 三角錐(すい) $\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{Q}_k$ の体積 V_k を求めよ．ただし，$1\leqq k\leqq n-1$ とする．

(3) $I=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k$ とおくとき，I を積分定数を用いて表せ．ただし，$V_0=0$ とする．

(4) I の値を求めよ．

$\boxed{\textbf{4}}$ r を 9 以上の整数として，赤球 r 個と白球 10 個が入っている袋がある．この袋から 9 個の球を同時に取り出し，そのうちの赤球の個数を調べ，取り出した球に白球を 1 個加えて袋に戻すという試行を繰り返す．つまり，1 回の試行ごとに袋の中の白球が 1 個ずつ増えることになる．n 回目の試行において取り出された 9 個の球のうち，赤球がちょうど 4 個である確率を P_n で表す．

(1) $P_1 < P_2$ が成り立つことを示せ．

(2) $P_n < P_{n+1}$ が成り立つための n の範囲を r を用いて表せ．

(3) $r = 50$ のとき，P_n が最大となる n の値を求めよ．

$\boxed{\textbf{5}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 次の方程式を解け．ただし，i は虚数単位，x は実数とする．

$$(1+i)x^2 - (1+3i)x - 2 + 2i = 0$$

(2) 次の方程式を解け．

$$\log_4(4x-7) + \log_2 x = 1 + 3\log_4(x-1)$$

(3) 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(t,\ 0)$，B$(0,\ 1-t)$ $(0 < t < 1)$ を頂点とする三角形 OAB を，x 軸の周りに 1 回転させてできる円錐の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ．

$\boxed{\textbf{6}}$ $\triangle$ABC は，$\tan A = \dfrac{4}{3}$，BC $= 6$ を満たしているものとする．ただし，$A = \angle$BAC とする．

(1) $\sin A$ および $\cos A$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) $\triangle$ABC の外接円の半径を求めよ．

(3) $\triangle$ABC の面積の最大値と，そのときの辺 AB の長さを求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 2a \\ a-3 & a-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 2a \\ a-3 & a-4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3a^2-6a & 4a^2-8a \\ 2a^2-10a+12 & 3a^2-14a+16 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3a(a-2) & 4a(a-2) \\ 2(a-2)(a-3) & (a-2)(3a-8) \end{pmatrix}$$

$A^2 = O$ であるから　　$\boldsymbol{a = 2}$

別解 A にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$A^2 - 2(a-2)A + (\det A)E = O \quad \cdots (*)$$

$\det(A^2) = (\det A)^2$，$\det(A^2) = \det O = 0$ より，$\det A = 0$

$A^2 = O$，$\det A = 0$ を $(*)$ に代入して　$-2(a-2)A = O$

A の成分から $A \neq O$ であるから　　$a = 2$

(2) $A^2 = O$ より，$A^k = O$ $(k = 2, 3, \cdots)$ であるから

$$B^n = (2E+A)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k (2E)^{n-k}A^k$$
$$= (2E)^n + n(2E)^{n-1}A$$
$$= 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + n{\cdot}2^{n-1}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$= \boldsymbol{\begin{pmatrix} (n+1)2^n & n{\cdot}2^{n+1} \\ -n{\cdot}2^{n-1} & (1-n)2^n \end{pmatrix}}$$

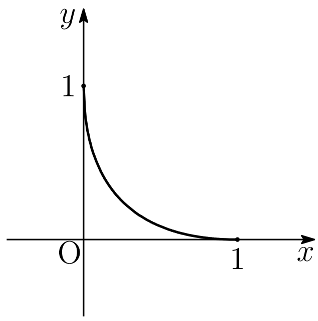
$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ より　$y=x-2\sqrt{x}+1$

ゆえに　$y'=1-\dfrac{1}{\sqrt{x}},\quad y''=\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

$0<x<1$ において，

$$y'<0,\quad y''>0$$

よって，C は下に凸のグラフで，右のようになる．



(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ を x で微分すると

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}y'=0\quad \text{ゆえに}\quad y'=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

点 $(a,\ b)$ における接線の方程式は $(0<a<1)$

$$y-b=-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}(x-a)\quad \text{ゆえに}\quad \frac{x}{\sqrt{a}}+\frac{y}{\sqrt{b}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

$(a,\ b)$ は C 上の点であるから，接線 l の方程式は

$$\frac{x}{\sqrt{a}}+\frac{y}{1-\sqrt{a}}=1$$

よって　x 切片 $\boldsymbol{\sqrt{a}}$，y 切片 $\boldsymbol{1-\sqrt{a}}$

(3) 立体の体積を V とすると　$V=\dfrac{1}{3}\pi(1-\sqrt{a})^2\sqrt{a}$

ここで，$t=\sqrt{a}$ とおくと $(0<t<1)$

$$V=\frac{\pi}{3}(1-t)^2t=\frac{\pi}{3}(t^3-2t^2+t)$$

ゆえに　$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{\pi}{3}(3t^2-4t+1)=\dfrac{\pi}{3}(t-1)(3t-1)$

したがって，V の増減表は次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	(1)
$\frac{dV}{dt}$		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって　$t=\dfrac{1}{3}$　すなわち　$a=\dfrac{1}{9}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{4}{81}\pi}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{P}_k\left(\dfrac{k}{n},\ 2-\dfrac{k}{n},\ 0\right)$，$\mathrm{P}_{k+1}\left(\dfrac{k+1}{n},\ 2-\dfrac{k+1}{n},\ 0\right)$ は xy 平面上の点であるから，$\triangle \mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}$ の面積を S_k とすると

$$S_k = \frac{1}{2}\left|\frac{k}{n}\left(2-\frac{k+1}{n}\right)-\left(2-\frac{k}{n}\right)\frac{k+1}{n}\right| = \boldsymbol{\frac{1}{n}}$$

(2) $\mathrm{Q}_k(0,\ 0,\ z_k)$ とおくと $(z_k>0)$，$\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k{}^2=4$ であるから

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2+\left(2-\frac{k}{n}\right)^2+z_k{}^2=4 \quad \text{これを解いて} \quad z_k=\frac{\sqrt{4nk-2k^2}}{n}$$

よって $$V_k=\frac{1}{3}S_k\cdot z_k=\frac{1}{3}n\times\frac{\sqrt{4nk-2k^2)}}{n}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{4nk-2k^2}}{3n^2}}$$

(3) (2) の結果から

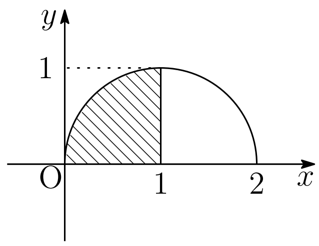
$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{4nk-2k^2}}{3n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{4\left(\frac{k}{n}\right)-2\left(\frac{k}{n}\right)^2} \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1\sqrt{4x-2x^2}\,dx=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,dx} \end{aligned}$$

(4) $y=\sqrt{2x-x^2}$ とおくと

$$y^2=2x-x^2$$

ゆえに $(x-1)^2+y^2=1$

このとき，$\displaystyle\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,dx$ は右の図の斜線部分の面積であるから



$$\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4} \quad \text{よって} \quad I=\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{\pi}{4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{12}\pi}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $P_1 = \dfrac{{}_r\mathrm{C}_4 \cdot {}_{10}\mathrm{C}_5}{{}_{10+r}\mathrm{C}_9}$，$P_2 = \dfrac{{}_r\mathrm{C}_4 \cdot {}_{11}\mathrm{C}_5}{{}_{11+r}\mathrm{C}_9}$ であるから

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{{}_{10+r}\mathrm{C}_9}{{}_{11+r}\mathrm{C}_9} \times \frac{{}_{11}\mathrm{C}_5}{{}_{10}\mathrm{C}_5} = \frac{2+r}{11+r} \times \frac{11}{6} = \frac{11r+22}{6r+66}$$

したがって　$\dfrac{P_2}{P_1} - 1 = \dfrac{5r-44}{6r+66}$

$r > 9$ であるから　$\dfrac{P_2}{P_1} - 1 > 0$　よって　$P_2 > P_1$

(2) $P_n = \dfrac{{}_r\mathrm{C}_4 \cdot {}_{n+9}\mathrm{C}_5}{{}_{n+r+9}\mathrm{C}_9}$，$P_2 = \dfrac{{}_r\mathrm{C}_4 \cdot {}_{n+10}\mathrm{C}_5}{{}_{n+r+10}\mathrm{C}_9}$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{P_{n+1}}{P_n} &= \frac{{}_{n+r+9}\mathrm{C}_9}{{}_{n+r+10}\mathrm{C}_9} \times \frac{{}_{n+10}\mathrm{C}_5}{{}_{n+9}\mathrm{C}_5} \\ &= \frac{n+r+1}{n+r+10} \times \frac{n+10}{n+5} = \frac{n^2+(r+11)n+10r+10}{n^2+(r+15)n+5r+50}\end{aligned}$$

したがって　$\dfrac{P_{n+1}}{P_n} - 1 = \dfrac{-4n+5r-40}{n^2+(r+15)n+5r+50}$

$P_{n+1} > P_n$ が成り立つとき

$$-4n+5r-40 > 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{n < \frac{5}{4}r - 10}$$

(3) $r = 50$ のとき，(2) の結果から

$$n < \frac{5}{4} \cdot 50 - 10 \quad \text{これをみたす最大の } n \text{ は} \quad 52$$

したがって　$P_1 < P_2 < \cdots < P_{52} < P_{53} > P_{54} > \cdots$

よって，P_n が最大となる n は　$\boldsymbol{n = 53}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 与えられた方程式から

$$x^2 - x - 2 + (x^2 - 3x + 2)i = 0$$

ゆえに　$(x-2)(x+1) + (x-2)(x-1)i = 0$

x は，実数であるから

$$(x-2)(x+1) = 0 \text{　かつ　} (x-2)(x-1) = 0$$

よって　　$\boldsymbol{x = 2}$

(2) 真数は正であるから

$$4x - 7 > 0,\quad x > 0,\quad x - 1 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad x > \frac{7}{4} \quad \cdots ①$$

与えられた方程式から

$$\log_4(4x-7) + \log_4 x^2 = \log_4 4 + \log_4(x-1)^3$$
$$\log_4(4x-7)x^2 = \log_4 4(x-1)^3$$

ゆえに　$(4x-7)x^2 = 4(x-1)^3$　整理すると　$5x^2 - 12x + 4 = 0$

したがって　$(x-2)(5x-2) = 0$　これを ① に注意して解くと　$\boldsymbol{x = 2}$

(3) 円錐の体積を V とすると $(0 < t < 1)$

$$V = \frac{\pi}{3}(1-t)^2 t = \frac{\pi}{3}(t^3 - 2t^2 + t)$$

V を t で微分すると

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}(3t^2 - 4t + 1) = \frac{\pi}{3}(t-1)(3t-1)$$

V の増減表は，次のようになる．

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	(1)
$\frac{dV}{dt}$		$+$	0	$-$	
V		↗	極大	↘	

よって　$\boldsymbol{t = \frac{1}{3}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\frac{4}{81}\pi}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\tan A = \dfrac{4}{3}$ を $1 + \tan^2 A = \dfrac{1}{\cos^2 A}$ に代入すると

$$1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 A} \quad ゆえに \quad \cos^2 A = \frac{9}{25}$$

$\tan A > 0$ より，A は鋭角であるから，$\cos A > 0$ より

$$\boldsymbol{\cos A = \frac{3}{5}}$$

また　$\sin A = \tan A \cos A = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{3}{5} = \boldsymbol{\dfrac{4}{5}}$

(2) 外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$2R = \frac{\mathrm{BC}}{\sin A} = 6 \div \frac{4}{5} \qquad よって \qquad \boldsymbol{R = \frac{15}{4}}$$

(3) $b = \mathrm{CA}$，$c = \mathrm{AB}$ とおくと，余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

に $a = 6$，$\cos A = \dfrac{3}{5}$ を代入すると

$$6^2 = b^2 + c^2 - \frac{6}{5}bc \quad ゆえに \quad 36 - \frac{4}{5}bc = (b - c)^2$$

したがって　$36 - \dfrac{4}{5}bc \geqq 0$　すなわち　$bc \leqq 45$

上式において，等号が成立するのは $b = c = 3\sqrt{5}$ のときである．

よって，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は，$\mathbf{AB = 3\sqrt{5}}$ のとき最大となり，その最大値は

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\cdot 45\cdot\frac{4}{5} = \mathbf{18}$$