平成19年度　琉球大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・農・教育学部　平成19年2月25日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部　1　2　3　4　数 I・II・III・A・B・C(120 分)
- 農・教育 [理科教育・技術教育・学校心理学・児童教育・障害児教育・情報教育コース・教育カウンセリング A 群] 学部　2　5　数 I・II・A・B(60 分)

1 曲線 $y = e^x$ と直線 $y = ax + b$ が交点をもたないような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を図示せよ．ただし，$\lim_{x\to\infty}(e^x - kx) = \infty$ (k は定数) および $\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ を証明なしで用いてよい．

2 4 点 O(0, 0, 0)，A(2, 1, 4)，B(3, 0, 1)，C(1, 2, 1) を頂点とする四面体 AOBC がある．

(1) 3 点 O，B，C の定める平面に，点 A から垂線 AH を下す．点 H の座標を求めよ．

(2) 三角形 OBC の面積と四面体 AOBC の体積を求めよ．

(3) 四面体 AOBC に外接する球，すなわち，4 点 A，O，B，C を通る球面を考える．この球面の方程式を求めよ．

3 次の問いに答えよ．

(1) 直線 $2x + y = 0$ に関する対称移動を表す行列を S とする．行列 S および S^2 を求めよ．

(2) 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は単位行列ではないとする．この A が表す一次変換 (移動) を g とする．この g によって点 $(1, -2)$ は点 $(1, -2)$ に移され，合成変換 (合成移動) $g \circ g$ は恒等変換となる．b，c，d を a を用いて表せ．ここで，恒等変換とはすべての点を自分自身に移す変換 (移動) である．

4 次の問いに答えよ．

(1) 極方程式 $r = 2(\cos\theta + \sin\theta)$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{4}\pi\right)$ が表す曲線を直交座標平面上にかけ．

(2) (1) で求めた曲線を x 軸方向に -1 だけ平行移動して得られる曲線を C とする．この曲線 C と x 軸によって囲まれる図形 D の面積を求めよ．

(3) (2) の図形 D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

5 放物線 $C : y = (x-p)^2 + q$ の頂点 $(p,\ q)$ が，放物線 $y = -4x^2 + 12x\ (y \geqq 0)$ 上を動くとき，放物線 C と x 軸および 2 直線 $x = 0$，$x = 2$ で囲まれた部分の面積の最大値と，そのときの p の値を求めよ．

解答例

1 $y=e^x$ と $y=ax+b$ が交点をもたないとき，方程式 $e^x-ax-b=0$ は解をもたない．$f(x)=e^x-ax-b$ とおくと，$f'(x)=e^x-a$ であるから

(i) $a<0$ のとき，$f(x)$ は単調増加．

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

このとき，$f(x)=0$ は解をもつので，不適．

(ii) $a=0$ のとき，方程式 $f(x)=0$ から　$e^x=b$

この方程式が解をもたないためには　$b\leqq 0$

(iii) $a>0$ のとき，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$\log a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

このとき，$f(x)=0$ が解をもたないためには，$f(\log a)>0$

$$a-a\log a-b>0 \quad \text{すなわち} \quad b<a-a\log a$$

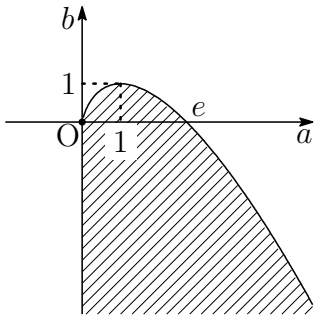
ここで，$g(a)=a-a\log a$ とおくと

$$g'(a)=-\log a$$

したがって，$g(a)$ の増減表は

a	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(a)$		$+$	0	$-$
$g(a)$		$\nearrow$	1	$\searrow$

また　$\displaystyle\lim_{a\to+0} g(a)=0$



よって，$(a,\ b)$ の領域は右の図のとおり．

$a<0$ のとき なし

$a=0$ のとき　$b\leqq 0$

$a>0$ のとき　$b<a-a\log a$

別解 曲線 $C : y = e^x$ と直線 $l : y = ax + b$ の共有点について，a の符号による場合分けをする．

(i) $a < 0$ のとき，l は C と共有点をもつ．

(ii) $a = 0$ のとき，直線 $y = b$ は $b \leqq 0$ のとき C と共有点をもたない．

(iii) $a > 0$ のとき，C 上の接線で傾きが a となる点は　$(\log a,\ a)$
ゆえに，その接線の方程式は

$$y - a = a(x - \log a) \quad \text{すなわち} \quad y = ax + a - \log a \quad \cdots (*)$$

C と l が共有点をもたないとき，直線 l は，直線 $(*)$ の下側にあるから

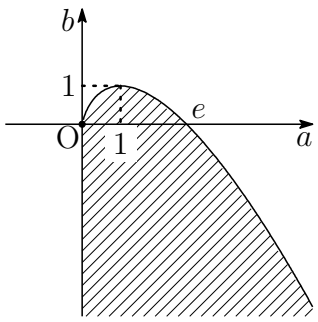
$$b < a - \log a$$

ここで，$g(a) = a - a\log a$ とおくと

$$g'(a) = -\log a$$

したがって，$g(a)$ の増減表は

a	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(a)$		$+$	0	$-$
$g(a)$		$\nearrow$	1	$\searrow$



また　$\displaystyle\lim_{a \to +0} g(a) = 0$

よって，$(a,\ b)$ の領域は右の図のとおり．　$a < 0$ のとき なし
$a = 0$ のとき　$b \leqq 0$
$a > 0$ のとき　$b < a - a\log a$

補足 $\displaystyle\lim_{x \to +0} x\log x = 0$ は，長崎大学 2007 年一般前期 $\boxed{5}$ の補足を参照[1]．　■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2007.pdf

2 (1) H は平面 OBC 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

とおける (s，t は実数).

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= s(3,\ 0,\ 1) + t(1,\ 2,\ 1) - (2,\ 1,\ 4)\\ &= (3s+t-2,\ 2t-1,\ s+t-4)\end{aligned}$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$ より

$$\begin{aligned}3(3s+t-2) + 1(s+t-4) &= 0\\ 5s+2t &= 5 \quad \cdots ①\end{aligned}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$ より

$$\begin{aligned}1(3s+t-2) + 2(2t-1) + 1(s+t-4) &= 0\\ 2s+3t &= 4 \quad \cdots ②\end{aligned}$$

①，② を解いて　$s = \dfrac{7}{11}$，$t = \dfrac{10}{11}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{7}{11}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \dfrac{10}{11}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$$= \frac{7}{11}(3,\ 0,\ 1) + \frac{10}{11}(1,\ 2,\ 1) = \left(\frac{31}{11},\ \frac{20}{11},\ \frac{17}{11}\right)$$

よって　$\mathbf{H}\left(\dfrac{\mathbf{31}}{\mathbf{11}},\ \dfrac{\mathbf{20}}{\mathbf{11}},\ \dfrac{\mathbf{17}}{\mathbf{11}}\right)$

(2) $\triangle\mathrm{OBC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{10\cdot 6 - 4^2} = \boldsymbol{\sqrt{11}}$

(1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left(\frac{31}{11},\ \frac{20}{11},\ \frac{17}{11}\right) - (2,\ 1,\ 4)\\ &= \frac{9}{11}(1,\ 1,\ -3)\\ |\overrightarrow{\mathrm{AH}}| &= \frac{9}{11}\sqrt{1+1+9} = \frac{9}{\sqrt{11}}\end{aligned}$$

したがって，四面体 AOBC の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OBC} \times |\overrightarrow{\mathrm{AH}}| = \frac{1}{3} \times \sqrt{11} \times \frac{9}{\sqrt{11}} = \mathbf{3}$$

解説 外積 (ベクトル積) を用いると簡単に求めることができる[2]．外積は，高校数学の範囲外であるから，検算用に使用し，答案には書かないようにする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \times \overrightarrow{\mathrm{OC}} = (3,\ 0,\ 1) \times (1,\ 2,\ 1) = (-2, -2,\ 6)$$
$$\triangle\mathrm{OBC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OB}} \times \overrightarrow{\mathrm{OC}}| = \sqrt{11}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}} \times \overrightarrow{\mathrm{OC}}) = (2,\ 1,\ 4)\cdot(-2, -2,\ 6) = 18$$

四面体 AOBC の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{6}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}} \times \overrightarrow{\mathrm{OC}})| = \frac{1}{6} \times 18 = 3$$

(3) 求める球面の方程式は，原点を通ることに注意して

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz = 0$$

とおく．これが 3 点 A(2, 1, 4)，B(3, 0, 1)，C(1, 2, 1) を通るから

$$\begin{aligned} 2a + b + 4c &= -21 \\ 3a + c &= -10 \\ a + 2b + c &= -6 \end{aligned}$$

これを解いて　$a = -\dfrac{17}{9}$，$b = \dfrac{1}{9}$，$c = -\dfrac{13}{3}$

よって，求める球面の方程式は

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 - \frac{17}{9}x + \frac{1}{9}y - \frac{13}{3}z = 0}$$

補足 (3) の結果を変形すると，次のようになる．

$$\left(x - \frac{17}{18}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{18}\right)^2 + \left(z - \frac{13}{6}\right)^2 = \frac{1811}{324}$$

■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf の $\boxed{4}$ を参照

3 (1) 平面上の任意に点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が S によって $\mathrm{P}'(x',\ y')$ に移動するとき，実数 s，t を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

これらを $S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ に代入すると

$$sS\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + tS\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

上式は，すべての実数 s，t について成り立つので

$$S\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}} \\ S^2 &= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

(2) A にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

合成変換 $g{\circ}g$ が恒等変換，すなわち $A^2=E$ であるから

$$E-(a+d)A+(ad-bc)E=O \quad \text{ゆえに} \quad (a+d)A=(ad-bc+1)E$$

$a+d\neq 0$ のとき，A は E の実数倍となり，A の条件に反する．

ゆえに　　$a+d=0\cdots$①，$ad-bc+1=0\cdots$②

g によって，点 $(1,-2)$ は点 $(-1,\ 2)$ に移されるので

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ゆえに　　$a-2b=1\cdots$③，$c-2d=-2\cdots$④

①，③，④ より　　$\boldsymbol{b=\frac{1}{2}(a-1),\ c=-2(a+1),\ d=-a}$

これは ② をみたす．　■

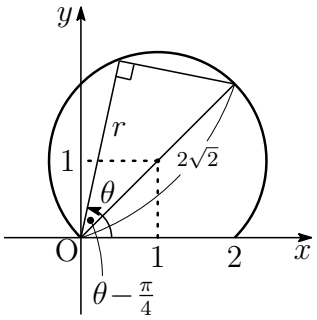
4 (1) $r = 2(\cos\theta + \sin\theta) = 2\sqrt{2}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$

したがって，描く曲線は，点 $(1,\ 1)$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円の一部であり，

$\theta = 0$ のとき　$r = 2$　すなわち　$(2,\ 0)$

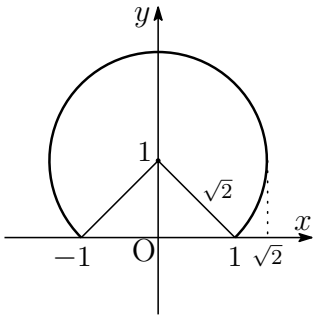
$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$ のとき　$r = 0$　すなわち　$(0,\ 0)$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{4}\pi$ であるから，右の図のようになる．



(2) 半径 $\sqrt{2}$，中心角が $\dfrac{3}{2}\pi$ の扇形の面積と底辺が 2 で高さが 1 の三角形の面積の和であるから

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2\cdot\frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = \boldsymbol{\frac{3}{2}\pi + 1}$$



(3) 図形 D は y 軸に関して対称であるから，求める立体の体積を V とすると

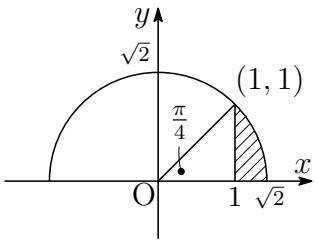
$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi} &= \int_0^{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2-x^2}\,)^2dx - \int_1^{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2-x^2}\,)^2 \\ &= \int_0^{\sqrt{2}}(3-x^2+2\sqrt{2-x^2}\,)dx - \int_1^{\sqrt{2}}(3-x^2-2\sqrt{2-x^2}\,)dx \\ &= \int_0^1(3-x^2)\,dx + 2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,dx + 2\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\,dx\end{aligned}$$

ここで，$S_1 = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}$，$S_2 = \displaystyle\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}$ とおくと

S_1 は半径 $\sqrt{2}$ の $\dfrac{1}{4}$ 円の面積で，S_2 は右の図の斜線部分の面積であるから

$$S_1 = \frac{1}{4}\pi(\sqrt{2}\,)^2 = \frac{1}{2}\pi$$

$$S_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\,)^2\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$



ゆえに　$\dfrac{V}{2\pi} = \left[\,3x - \dfrac{x^3}{3}\,\right]_0^1 + 2S_1 + 2S_2 = \dfrac{8}{3} + 2\cdot\dfrac{\pi}{2} + 2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\right)$

したがって　$\dfrac{V}{2\pi} = \dfrac{3}{2}\pi + \dfrac{5}{3}$　よって　$V = \boldsymbol{3\pi^2 + \dfrac{10}{3}\pi}$

別解 求める立体の体積を V とすると

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_0^{\frac{3}{4}\pi} r^3 \sin\theta \, d\theta = \frac{16}{3}\pi \int_0^{\frac{3}{4}\pi} (\cos\theta + \sin\theta)^3 \sin\theta \, d\theta \quad \cdots (*)$$

であるから [3]

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{3}{4}\pi} (\cos\theta + \sin\theta)^4 \, d\theta &= 4\int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sin^4\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) d\theta = 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin^4 t \, dt \\ &= \left[\frac{3}{2}t - \frac{3}{2}\sin t\cos t - \sin^3 t\cos t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\ &= \frac{9}{8}\pi + 1\end{aligned}$$

また $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}\pi} (\cos\theta + \sin\theta)^3(-\sin\theta + \cos\theta) \, d\theta = \left[\frac{1}{4}(\cos\theta + \sin\theta)^4\right]_0^{\frac{3}{4}\pi}$

$$= -\frac{1}{4}$$

上の 2 式から $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}\pi} (\cos\theta + \sin\theta)^3 \sin\theta \, d\theta = \frac{9}{16}\pi + \frac{5}{8}$

これを $(*)$ に代入すると

$$V = \frac{16}{3}\pi \times \left(\frac{9}{16}\pi + \frac{5}{8}\right) = \boldsymbol{3\pi^2 + \frac{10}{3}\pi}$$

■

[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2003.pdf の $\boxed{1}$ を参照

5 $C : y = (x-p)^2 + q$ の頂点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ は，放物線 $y = -4x^2 + 12x\ (y \geqq 0)$ 上を動くので，P は x 軸の上側にあり，

$$q = -4p^2 + 12p \quad \cdots ①$$

である．したがって，C と x 軸および 2 直線 $x = 0$，$x = 2$ で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{(x-p)^2 + q\}\,dx \\ &= \left[\ \frac{1}{3}(x-p)^3 + qx\ \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} - 4p + 2p^2 + 2q \end{aligned}$$

上式に ① を代入すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{8}{3} - 4p + 2p^2 + 2(-4p^2 + 12p) \\ &= -6p^2 + 20p + \frac{8}{3} \\ &= -6\left(p - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{58}{3} \end{aligned}$$

よって，面積は $\boldsymbol{p = \frac{5}{3}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\frac{58}{3}}$ をとる． ■