

平成 19 年度 琉球大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

理・工・医・農・教育学部 平成 19 年 2 月 25 日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部は, [1] ~ [4] 数 I・II・III・A・B・C(120 分)
- 農・教育 [理科教育・技術教育・学校心理学・児童教育・障害児教育・情報教育
コース・教育カウンセリング A 群] 学部は, [2], [5] 数 I・II・A・B(60 分)

[1] 曲線 $y = e^x$ と直線 $y = ax + b$ が交点をもたないような点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ. ただし, $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x - kx) = \infty$ (k は定数) および $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ を証明なしで用いてよい.

[2] 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(2, 1, 4)$, $B(3, 0, 1)$, $C(1, 2, 1)$ を頂点とする四面体 $AOBC$ がある.

- (1) 3 点 O, B, C の定める平面に, 点 A から垂線 AH を下す. 点 H の座標を求めよ.
- (2) 三角形 OBC の面積と四面体 $AOBC$ の体積を求めよ.
- (3) 四面体 $AOBC$ に外接する球, すなわち, 4 点 A, O, B, C を通る球面を考える. この球面の方程式を求めよ.

[3] 次の問いに答えよ.

- (1) 直線 $2x + y = 0$ に関する対称移動を表す行列を S とする. 行列 S および S^2 を求めよ.
- (2) 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は単位行列ではないとする. この A が表す一次変換 (移動) を g とする. この g によって点 $(1, -2)$ は点 $(1, -2)$ に移され, 合成変換 (合成移動) $g \circ g$ は恒等変換となる. b, c, d を a を用いて表せ. ここで, 恒等変換とはすべての点を自分自身に移す変換 (移動) である.

[4] 次の問いに答えよ.

- (1) 極方程式 $r = 2(\cos \theta + \sin \theta)$ $\left(0 \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi\right)$ が表す曲線を直角座標平面上にかけ.
- (2) (1) で求めた曲線を x 軸方向に -1 だけ平行移動して得られる曲線を C とする. この曲線 C と x 軸によって囲まれる図形 D の面積を求めよ.
- (3) (2) の図形 D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

- 5 放物線 $C : y = (x - p)^2 + q$ の頂点 (p, q) が、放物線 $y = -4x^2 + 12x$ ($y \geq 0$) 上を動くとき、放物線 C と x 軸および2直線 $x = 0, x = 2$ で囲まれた部分の面積の最大値と、そのときの p の値を求めよ。

正解

1 $y = e^x$ と $y = ax + b$ が交点をもたないとき，方程式 $e^x - ax - b = 0$ は解をもたない． $f(x) = e^x - ax - b$ とおくと， $f'(x) = e^x - a$ であるから

(i) $a < 0$ のとき， $f(x)$ は単調増加．

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

このとき， $f(x) = 0$ は解をもつので，不適．

(ii) $a = 0$ のとき，方程式 $f(x) = 0$ から $e^x = b$

この方程式が解をもたないためには $b \leq 0$

(iii) $a > 0$ のとき， $f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	\cdots	$\log a$	\cdots
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	極小	\nearrow

このとき， $f(x) = 0$ が解をもたないためには， $f(\log a) > 0$

$$a - a \log a - b > 0 \quad \text{すなわち} \quad b < a - a \log a$$

ここで， $g(a) = a - a \log a$ とおくと

$$g'(a) = -\log a$$

したがって， $g(a)$ の増減表は

a	(0)	\cdots	1	\cdots
$g'(a)$		$+$	0	$-$
$g(a)$		\nearrow	1	\searrow

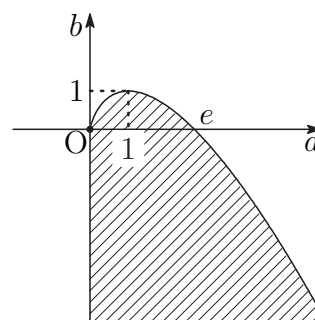
また $\lim_{a \rightarrow +0} g(a) = 0$

よって， (a, b) の領域は右の図のとおり．

$a < 0$ のとき なし

$a = 0$ のとき $b \leq 0$

$a > 0$ のとき $b < a - a \log a$



別解 曲線 $C: y = e^x$ と直線 $l: y = ax + b$ の共有点について, a の符号による場合分けをする.

- (i) $a < 0$ のとき, l は C と共有点をもつ.
- (ii) $a = 0$ のとき, 直線 $y = b$ は $b \leq 0$ のとき C と共有点をもたない.
- (iii) $a > 0$ のとき, C 上の接線で傾きが a となる点は $(\log a, a)$
ゆえに, その接線の方程式は

$$y - a = a(x - \log a) \quad \text{すなわち} \quad y = ax + a - \log a \quad \cdots (*)$$

C と l が共有点をもたないとき, 直線 l は, 直線 $(*)$ の下側にあるから

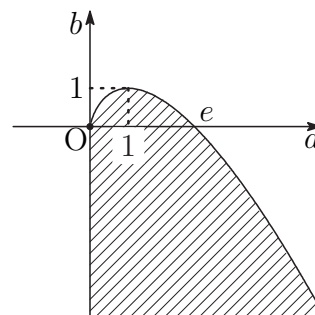
$$b < a - \log a$$

ここで, $g(a) = a - a \log a$ とおくと

$$g'(a) = -\log a$$

したがって, $g(a)$ の増減表は

a	(0)	...	1	...
$g'(a)$		+	0	-
$g(a)$		↗	1	↘



また $\lim_{a \rightarrow +0} g(a) = 0$

よって, (a, b) の領域は右の図のとおり.

- $a < 0$ のとき なし
- $a = 0$ のとき $b \leq 0$
- $a > 0$ のとき $b < a - a \log a$

補足 $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ は, 長崎大学 2007 年一般前期 5 の補足を参照¹.

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2007.pdf

2 (1) H は平面 OBC 上にあるから

$$\overrightarrow{OH} = s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$$

とおける (s, t は実数) .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \\ &= s(3, 0, 1) + t(1, 2, 1) - (2, 1, 4) \\ &= (3s + t - 2, 2t - 1, s + t - 4)\end{aligned}$$

このとき, $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{OB}$ であるから, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ より

$$\begin{aligned}3(3s + t - 2) + 1(s + t - 4) &= 0 \\ 5s + 2t &= 5 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

また, $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{OC}$ であるから, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ より

$$\begin{aligned}1(3s + t - 2) + 2(2t - 1) + 1(s + t - 4) &= 0 \\ 2s + 3t &= 4 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

①, ② を解いて $s = \frac{7}{11}, t = \frac{10}{11}$

したがって $\overrightarrow{OH} = \frac{7}{11}\overrightarrow{OB} + \frac{10}{11}\overrightarrow{OC}$

$$= \frac{7}{11}(3, 0, 1) + \frac{10}{11}(1, 2, 1) = \left(\frac{31}{11}, \frac{20}{11}, \frac{17}{11}\right)$$

よって $H\left(\frac{31}{11}, \frac{20}{11}, \frac{17}{11}\right)$

(2) $\triangle OBC = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2|\overrightarrow{OC}|^2 - (\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10 \cdot 6 - 4^2} = \sqrt{11}$

(1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \left(\frac{31}{11}, \frac{20}{11}, \frac{17}{11}\right) - (2, 1, 4) \\ &= \frac{9}{11}(1, 1, -3) \\ |\overrightarrow{AH}| &= \frac{9}{11}\sqrt{1+1+9} = \frac{9}{\sqrt{11}}\end{aligned}$$

したがって, 四面体 AOBC の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle OBC \times |\overrightarrow{AH}| = \frac{1}{3} \times \sqrt{11} \times \frac{9}{\sqrt{11}} = 3$$

解説 外積 (ベクトル積) を用いると簡単に求めることができる² . 外積は , 高校数学の範囲外であるから , 検算用に使用し , 答案には書かないようにする .

$$\vec{OB} \times \vec{OC} = (3, 0, 1) \times (1, 2, 1) = (-2, -2, 6)$$

$$\Delta OBC = \frac{1}{2} |\vec{OB} \times \vec{OC}| = \sqrt{11}$$

$$\vec{OA} \cdot (\vec{OB} \times \vec{OC}) = (2, 1, 4) \cdot (-2, -2, 6) = 18$$

四面体 AOBC の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{6} |\vec{OA} \cdot (\vec{OB} \times \vec{OC})| = \frac{1}{6} \times 18 = 3$$

(3) 求める球面の方程式は , 原点を通ることに注意して

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz = 0$$

とおく . これが 3 点 $A(2, 1, 4)$, $B(3, 0, 1)$, $C(1, 2, 1)$ を通るから

$$2a + b + 4c = -21$$

$$3a + c = -10$$

$$a + 2b + c = -6$$

これを解いて $a = -\frac{17}{9}$, $b = \frac{1}{9}$, $c = -\frac{13}{3}$

よって , 求める球面の方程式は

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{17}{9}x + \frac{1}{9}y - \frac{13}{3}z = 0$$

補足 (3) の結果を変形すると , 次のようになる .

$$\left(x - \frac{17}{18}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{18}\right)^2 + \left(z - \frac{13}{6}\right)^2 = \frac{1811}{324}$$

²http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf の 4 を参照

- 3** (1) 平面上の任意に点 $P(x, y)$ が S によって $P'(x', y')$ に移動するとき, 実数 s, t を用いて

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

これらを $S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ に代入すると

$$sS \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + tS \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

上式は, すべての実数 s, t について成り立つので

$$S \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{aligned}S &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \\ S^2 &= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2) A にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$$

合成変換 $g \circ g$ が恒等変換, すなわち $A^2 = E$ であるから

$$E - (a + d)A + (ad - bc)E = O \quad \text{ゆえに} \quad (a + d)A = (ad - bc + 1)E$$

$a + d \neq 0$ のとき, A は E の実数倍となり, A の条件に反する.

$$\text{ゆえに} \quad a + d = 0 \cdots \textcircled{1}, \quad ad - bc + 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

g によって, 点 $(1, -2)$ は点 $(-1, 2)$ に移されるので

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ゆえに} \quad a - 2b = 1 \cdots \textcircled{3}, \quad c - 2d = -2 \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より} \quad b = \frac{1}{2}(a - 1), \quad c = -2(a + 1), \quad d = -a$$

これは $\textcircled{2}$ をみたす.

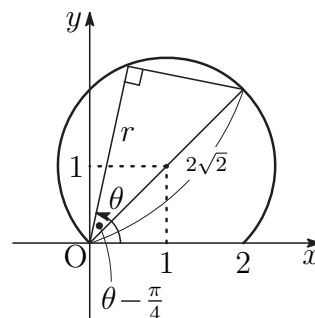
$$\boxed{4} \quad (1) \quad r = 2(\cos \theta + \sin \theta) = 2\sqrt{2} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$$

したがって、描く曲線は、点 $(1, 1)$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円の一部であり、

$$\theta = 0 \text{ のとき } r = 2 \text{ すなわち } (2, 0)$$

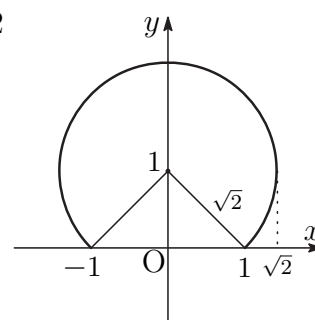
$$\theta = \frac{3}{4}\pi \text{ のとき } r = 0 \text{ すなわち } (0, 0)$$

$0 \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi$ であるから、右の図のようになる。



- (2) 半径 $\sqrt{2}$ 、中心角が $\frac{3}{2}\pi$ の扇形の面積と底辺が 2 で高さが 1 の三角形の面積の和であるから

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{3}{2}\pi + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{3}{2}\pi + 1$$



- (3) 図形 D は y 軸に関して対称であるから、求める立体の体積を V とすると

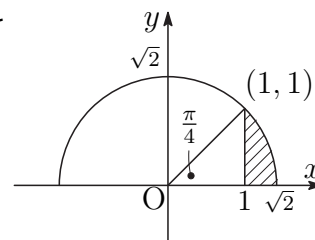
$$\begin{aligned} \frac{V}{2\pi} &= \int_0^{\sqrt{2}} (1 + \sqrt{2-x^2})^2 dx - \int_1^{\sqrt{2}} (1 - \sqrt{2-x^2})^2 dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} (3 - x^2 + 2\sqrt{2-x^2}) dx - \int_1^{\sqrt{2}} (3 - x^2 - 2\sqrt{2-x^2}) dx \\ &= \int_0^1 (3 - x^2) dx + 2 \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx + 2 \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx \end{aligned}$$

ここで、 $S_1 = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}$ 、 $S_2 = \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}$ とおくと

S_1 は半径 $\sqrt{2}$ の $\frac{1}{4}$ 円の面積で、 S_2 は右の図の斜線部分の面積であるから

$$S_1 = \frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2}\pi$$

$$S_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$



$$\text{ゆえに } \frac{V}{2\pi} = \left[3x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + 2S_1 + 2S_2 = \frac{8}{3} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} + 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{したがって } \frac{V}{2\pi} = \frac{3}{2}\pi + \frac{5}{3} \quad \text{よって } V = 3\pi^2 + \frac{10}{3}\pi$$

別解 求める立体の体積を V とすると

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_0^{\frac{3}{4}\pi} r^3 \sin \theta d\theta = \frac{16}{3}\pi \int_0^{\frac{3}{4}\pi} (\cos \theta + \sin \theta)^3 \sin \theta d\theta \quad \dots (*)$$

であるから³

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3}{4}\pi} (\cos \theta + \sin \theta)^4 d\theta &= 4 \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sin^4 \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) d\theta = 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin^4 t dt \\ &= \left[\frac{3}{2}t - \frac{3}{2} \sin t \cos t - \sin^3 t \cos t \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\ &= \frac{9}{8}\pi + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{また } \int_0^{\frac{3}{4}\pi} (\cos \theta + \sin \theta)^3 (-\sin \theta + \cos \theta) d\theta &= \left[\frac{1}{4}(\cos \theta + \sin \theta)^4 \right]_0^{\frac{3}{4}\pi} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{上の 2 式から } \int_0^{\frac{3}{4}\pi} (\cos \theta + \sin \theta)^3 \sin \theta d\theta = \frac{9}{16}\pi + \frac{5}{8}$$

これを (*) に代入すると

$$V = \frac{16}{3}\pi \times \left(\frac{9}{16}\pi + \frac{5}{8} \right) = 3\pi^2 + \frac{10}{3}\pi$$

³http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2003.pdf の **1** を参照

- 5 $C: y = (x - p)^2 + q$ の頂点 $P(p, q)$ は、放物線 $y = -4x^2 + 12x$ ($y \geq 0$) 上を動くので、 P は x 軸の上側にあり、

$$q = -4p^2 + 12p \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。したがって、 C と x 軸および 2 直線 $x = 0, x = 2$ で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{(x - p)^2 + q\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - p)^3 + qx \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} - 4p + 2p^2 + 2q \end{aligned}$$

上式に $\textcircled{1}$ を代入すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{8}{3} - 4p + 2p^2 + 2(-4p^2 + 12p) \\ &= -6p^2 + 20p + \frac{8}{3} \\ &= -6 \left(p - \frac{5}{3} \right)^2 + \frac{58}{3} \end{aligned}$$

よって、面積は $p = \frac{5}{3}$ のとき最大値 $\frac{58}{3}$ をとる。