平成18年度　琉球大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・農・教育学部　平成18年2月25日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B・C(120分)
- 農・教育 [理科教育・技術教育・学校心理学・児童教育・障害児教育・情報教育コース・教育カウンセリングA群] 学部は，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数I・II・A・B(60分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ n を自然数とする．次の各問に答えよ．

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n}\right)$ を求めよ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(4n)}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の各問に答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int x\cos x\,dx$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ はすべての実数 x で $f'(x)=|x\cos x|$ を満たし，かつ $f(0)=0$ となる．$0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で $f(x)$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ n を2以上の自然数とする．1から n までの数字がひとつずつ書いてある n 枚のカードの中から同時2枚のカードを取り出す．その2枚のカードに書いてある数字のうち大きい方を X とする．次の各問に答えよ．

(1) X が偶数である確率を求めよ．

(2) X の期待値を求めよ．

$\boxed{4}$ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ $(a \neq 1)$ とする．次の式で数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ を定める．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1-b-a \\ 1-a \end{pmatrix}\quad (n=1,2,\cdots)$$

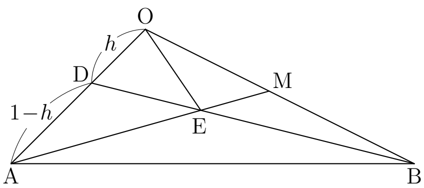
次の各問に答えよ．

(1) $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=A\left\{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right\}$ を満たす s，t を求めよ．

(2) 数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $0<a<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k - n\right)$ を求めよ．ただし，$0<a<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} na^n=0$ が成り立つことは用いてよい．

$\boxed{5}$ $\triangle$OAB において，辺 OB の中点を M，辺 OA を $h:(1-h)$ $(0<h<1)$ に内分する点を D とし，線分 AM，BD の交点を E とする．次の各問に答えよ．



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および h で表せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=4$，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ のとき，h の値を求めよ．

$\boxed{6}$ 次の各問に答えよ．

(1) $\sin\theta+\cos\theta=t$ とおく．$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ のとき，t のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ のとき，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n}\right)=\int_0^1\log\left(1+\frac{x}{3}\right)dx$

$$=\int_0^1 3\left(1+\frac{x}{3}\right)'\log\left(1+\frac{x}{3}\right)dx$$

$$=\left[\ 3\left(1+\frac{x}{3}\right)\log\left(1+\frac{x}{3}\right)\ \right]_0^1-\int_0^1 dx$$

$$=\mathbf{4\log\frac{4}{3}-1}$$

(2) $a_n=\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(4n)}$ とおくと

$$\frac{a_n}{3}=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{3n}\right)\left(1+\frac{2}{3n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{3n}\right)}$$

(1) の結果から $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\log\frac{a_n}{3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n}\right)$

$$=4\log\frac{4}{3}-1=\log\frac{256}{81e}$$

したがって $\displaystyle \lim_{n\to\infty}a_n=3\times\frac{256}{81e}=\frac{256}{27e}$

よって $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(4n)}=\boldsymbol{\frac{256}{27e}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\displaystyle\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$

$$= \boldsymbol{x\sin x + \cos x + C} \quad \textbf{(}\boldsymbol{C}\ \textbf{は積分定数)}$$

(2) $x\cos x$ の原始関数の 1 つを $F(x) = x\sin x + \cos x$ とおくと

(i) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x t\cos t\,dt \\ &= \Big[\ F(t)\ \Big]_0^x = F(x) - F(0) = x\sin x + \cos x - 1 \end{aligned}$$

(ii) $\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^x (-t\cos t)\,dt \\ &= \Big[\ F(t)\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[\ -F(t)\ \Big]_{\frac{\pi}{2}}^x = -F(x) + 2F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) \\ &= -(x\sin x + \cos x) + 2\cdot\frac{\pi}{2} - 1 \\ &= -x\sin x - \cos x + \pi - 1 \end{aligned}$$

よって $$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x\sin x + \cos x - 1 & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right) \\ -x\sin x - \cos x + \pi - 1 & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi\right) \end{cases}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $m = \begin{cases} \frac{n}{2} & (n\text{が偶数}) \\ \frac{n-1}{2} & (n\text{が奇数}) \end{cases}$ とする．

$X = 2k$ のとき，他のカードの数字は $2k-1$ 以下であるから

$$P(X = 2k) = \frac{2k-1}{{}_n\mathrm{C}_2} = \frac{2(2k-1)}{n(n-1)} \qquad (k = 1, 2, \cdots, m)$$

したがって，求める確率を P とすると

$$P = \sum_{k=1}^{m} P(X = 2k) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{m} (2k-1)$$
$$= \frac{2}{n(n-1)} \left\{ 2\cdot\frac{1}{2}m(m+1) - m \right\} = \frac{2m^2}{n(n-1)}$$

よって $\boldsymbol{P = \begin{cases} \dfrac{n}{2(n-1)} & (n\,\textbf{が偶数}) \\ \dfrac{n-1}{2n} & (n\,\textbf{が奇数}) \end{cases}}$

(2) $X = k$ のとき，他のカードの数字は $k-1$ 以下であるから

$$P(X = k) = \frac{k-1}{{}_n\mathrm{C}_2} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

よって，X の期待値 $E(X)$ は

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} k(k-1)$$
$$= \frac{2}{3n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} \{(k-1)k(k+1) - (k-2)(k-1)k\}$$
$$= \frac{2}{3n(n-1)} \times (n-1)n(n+1) = \boldsymbol{\frac{2}{3}(n+1)}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1)

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-b-a \\ 1-a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = A\left\{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right\}$$

上の第1式から第2式の辺々を引くと

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-b-a \\ 1-a \end{pmatrix}$$

ゆえに　$(A-E)\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b-1 \\ a-1 \end{pmatrix}$，$A-E = \begin{pmatrix} a-1 & b \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}$

$a \neq 1$ より $\det(A-E) = (a-1)^2 \neq 0$ であるから

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} &= (A-E)^{-1}\begin{pmatrix} a+b-1 \\ a-1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(a-1)^2}\begin{pmatrix} a-1 & -b \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+b-1 \\ a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{s = t = 1}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A\left\{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1}-1 \\ y_{n+1}-1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n-1 \\ y_n-1 \end{pmatrix}$$

ゆえに　$\begin{pmatrix} x_n-1 \\ y_n-1 \end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix} x_1-1 \\ y_1-1 \end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　$\cdots(*)$

ここで，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると，$F^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

このとき，$A = aE + bF$ であるから

$$\begin{aligned} A^{n-1} &= (aE+bF)^{n-1} = a^{n-1}E + (n-1)a^{n-2}bF \\ &= \begin{pmatrix} a^{n-1} & (n-1)a^{n-2}b \\ 0 & a^{n-1} \end{pmatrix} \quad \cdots(**) \end{aligned}$$

したがって $\quad \begin{pmatrix} x_n - 1 \\ y_n - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n-1} & (n-1)a^{n-2}b \\ 0 & a^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a^{n-1} + (n-1)a^{n-2}b \\ a^{n-1} \end{pmatrix}$$

よって $\quad \boldsymbol{x_n = a^{n-1} + (n-1)a^{n-2}b + 1,\ \ y_n = a^{n-1} + 1}$

(3) $(*)$ から $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} x_k - 1 \\ y_k - 1 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} A^{k-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\displaystyle (A-E)\sum_{k=1}^{n} A^{k-1} = A^n - E$, $\det(A-E) \neq 0$, および $(**)$ から

$$\sum_{k=1}^{n} A^{k-1} = (A-E)^{-1}(A^n - E)$$

$$= \frac{1}{(a-1)^2} \begin{pmatrix} a-1 & -b \\ 0 & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^n - 1 & na^{n-1}b \\ 0 & a^n - 1 \end{pmatrix}$$

$0 < a < 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A^{k-1} = \frac{1}{(a-1)^2} \begin{pmatrix} a-1 & -b \\ 0 & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(a-1)^2} \begin{pmatrix} 1-a & b \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} x_k - 1 \\ y_k - 1 \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A^{k-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(a-1)^2} \begin{pmatrix} 1-a & b \\ 0 & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって $\quad \displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k - n \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k - 1) = \boldsymbol{\frac{1-a+b}{(a-1)^2}}$

5 (1) $\triangle$OAM と直線 BD について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{DA}}\cdot\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EM}}\cdot\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{BO}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{h}{1-h}\cdot\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EM}}\cdot\frac{1}{2}=1$$

$\mathrm{AE}:\mathrm{EM}=2(1-h):h$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{h\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2(1-h)\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{2(1-h)+h}=\boldsymbol{\frac{h\vec{a}+(1-h)\vec{b}}{2-h}}$$

(2) $\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OM}=2$，$\angle\mathrm{AOM}=60^\circ$ であるから，$\triangle$OAM に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{AM}^2=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cos60^\circ=7 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{AM}=\sqrt{7}$$

$\mathrm{AE}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ より，E は AM の中点であるから

$$2(1-h):h=1:1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{h=\frac{2}{3}}$$

6 (1) $t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)$ より　$0^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ$ のとき　$\boldsymbol{1\leqq t\leqq\sqrt{2}}$

(2) $t=\sin\theta+\cos\theta$ の両辺を平方すると

$$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad \sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sin^3\theta+\cos^3\theta&=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)\\&=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)\\&=t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t\end{aligned}$$

ここで，$f(t)=-\dfrac{1}{2}t^3+\dfrac{3}{2}t$ $(1\leqq t\leqq\sqrt{2})$ とおくと

$$f'(t)=-\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}(t+1)(t-1)$$

したがって，$f(t)$ の増減表は，右のようなる．

t	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqq\sin^3\theta+\cos^3\theta\leqq1}$