平成17年度　琉球大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・農・教育学部　平成17年2月25日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B・C(120分)
- 農・教育 [理科教育・技術教育・学校心理学・児童教育・障害児教育・情報教育コース・教育カウンセリングA群] 学部は，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数I・II・A・B(60分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x)$ は3次式で，方程式 $f(x) = 0$ は，0，π，$-\pi$ を解にもち，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$ となる．次の問に答えよ．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) $g(x) = f'(x) - \pi\cos x$ とする．増減表を作って，$0 \leqq x \leqq \pi$ における $g(x) = 0$ の解は，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$，および $\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ の範囲に1個ずつであることを示せ．

(3) $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で，$y = g(x)$ と $y = \pi\sin x$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の問に答えよ．

(1) 複素数 $z\,(\neq 1)$ に対し，等式

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

がすべての自然数 n について成り立つことを数学的帰納法で証明せよ．

(2) 上記の等式において，z に $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r > 0)$ を代入して

$$1 + r\cos\theta + r^2\cos 2\theta + \cdots + r^n\cos n\theta$$

を計算せよ．ただし $r(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 1$ とする．

(3) $0 < r < 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}(1 + r\cos\theta + r^2\cos 2\theta + \cdots + r^n\cos n\theta)$$

を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $p > 1$ のとき，座標平面の点 $\mathrm{P}(p,\ 0)$ から楕円 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ に引いた2本の接線が直交する．このとき p の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 平面の上に正四面体がある．平面と接している面の3辺の1つを任意に選び，これを軸として正四面体をたおす．この操作を n 回続けて行ったとき，最初に平面と接していた面が再び平面と接する確率を p_n とする．

(1) p_1，p_2，p_3 を求めよ．

(2) p_n を n を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問に答えよ．

(1) $z = 1 + i$ のとき，z^{4n+1} を求めよ．ただし n は自然数とする．

(2) $2\log_{10}(a-b) = \log_{10} a + \log_{10} b$ のとき，$\dfrac{a}{b}$ の値を求めよ．

(3) $0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$ のとき，方程式 $\cos 2\theta + \cos\theta = 0$ を解け．

$\boxed{\mathbf{6}}$ a を $-2 < a < 2$ を満たす定数とする．座標平面において放物線 $y = x^2 + ax + 1$ に原点から引いた2本の接線の接点をP，Qとする．

(1) 2つの接点P，Qの座標を求めよ．

(2) 2本の接線と放物線で囲まれた図形の面積を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 3次方程式 $f(x)=0$ の解が 0, π, $-\pi$ であるから

$$f(x)=ax(x-\pi)(x+\pi) \qquad (a \text{ は定数})$$

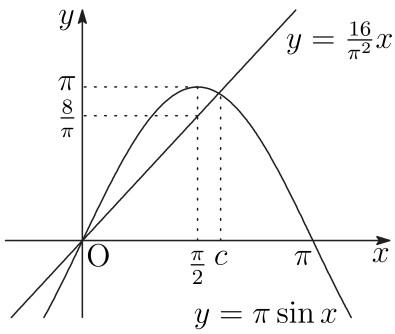
とおける．$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi$ であるから

$$a\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}\pi=\pi \quad \text{ゆえに} \quad a=-\frac{8}{3\pi^2}$$

よって　$f(x)=-\dfrac{8}{3\pi^2}x(x-\pi)(x+\pi)=\boldsymbol{-\dfrac{8}{3\pi^2}x^3+\dfrac{8}{3}x}$

(2) $f'(x)=-\dfrac{8}{\pi^2}x^2+\dfrac{8}{3}$ より

$$g(x)=-\frac{8}{\pi^2}x^2+\frac{8}{3}-\pi\cos x$$
$$g'(x)=-\frac{16}{\pi^2}x+\pi\sin x$$



$y=\pi\sin x$ と $y=\dfrac{16}{\pi^2}x$ は右の図のようになるから

$$g'(c)=0 \quad (0<c<\pi)$$

をみたす c が唯一存在する $(\frac{\pi}{2}<c<\pi)$.

$g(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	c	$\cdots$	π
$g'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\frac{8}{3}-\pi$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$\pi-\frac{16}{3}$

$g(x)$ は，$0<x<c$ で単調増加，$c<x<\pi$ で単調減少である．

$g(0)<0$，$g(c)>0$，$g(\pi)<0$ であるから

$$g(\alpha)=0 \quad \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right), \quad g(\beta)=0 \quad (c<\beta<\pi)$$

をみたす α，β が唯一存在する．

(3) $h(x)=f(x)-\pi\sin x$ とおくと　$h'(x)=g(x)$

また　　$h(0)=f(0)-0=0,$

$h(\frac{\pi}{2})=f(\frac{\pi}{2})-\pi=0,$

$h(\pi)=f(\pi)-0=0$

したがって，$h(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	β	$\cdots$	π
$h'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

上の増減表から　$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき　$h(x)\leqq 0$

$\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ のとき　$h(x)\geqq 0$

$h(x)=f(x)-\pi\sin x=-\dfrac{8}{3\pi^2}x^3+\dfrac{8}{3}x-\pi\sin x$ の原始関数の 1 つを

$$H(x)=-\frac{2}{3\pi^2}x^4+\frac{4}{3}x^2+\pi\cos x$$

とおく．求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}h(x)\,dx=-\Big[\;H(x)\;\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[\;H(x)\;\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\\&=H(0)+H(\pi)-2H\left(\frac{\pi}{2}\right)\\&=\pi+\left(\frac{2}{3}\pi^2-\pi\right)-2\times\frac{7}{24}\pi^2=\boldsymbol{\frac{\pi^2}{12}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1)

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad (z \neq 1) \quad \cdots (*)$$

とする．

i) $n = 1$ のとき

$$(*) \text{ の左辺} = 1 + z, \quad (*) \text{ の右辺} = \frac{1 - z^2}{1 - z} = \frac{(1 + z)(1 - z)}{1 - z} = 1 + z$$

よって，$n = 1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

ii) $n = k$ のとき

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^k = \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z}$$

が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} 1 + z + z^2 + \cdots + z^k + z^{k+1} &= \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z} + z^{k+1} \\ &= \frac{1 - z^{k+1} + z^{k+1}(1 - z)}{1 - z} \\ &= \frac{1 - z^{k+2}}{1 - z} \end{aligned}$$

よって，$n = k + 1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

i)，ii) から，すべての自然数 n について $(*)$ が成り立つ．

(2) ド・モアブルの定理を利用して

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} z^k &= \sum_{k=0}^{n}\{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta) = \sum_{k=0}^{n} r^k\cos k\theta + i\sum_{k=0}^{n} r^k\sin k\theta\end{aligned}$$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $z \neq 1$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{1-z^{n+1}}{1-z} &= \frac{(1-z^{n+1})(1-\overline{z})}{(1-z)(1-\overline{z})} = \frac{1-\overline{z}-z^{n+1}+|z|^2 z^n}{1-(z+\overline{z})+|z|^2} \\ &= \frac{1-r(\cos\theta - i\sin\theta)}{1-2r\cos\theta + r^2} \\ &\qquad - \frac{r^{n+1}\{\cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta\}}{1-2r\cos\theta+r^2} \\ &\qquad\qquad + \frac{r^{n+2}(\cos n\theta + i\sin n\theta)}{1-2r\cos\theta+r^2} \\ &= \frac{1-r\cos\theta - r^{n+1}\cos(n+1)\theta + r^{n+2}\cos n\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} \\ &\qquad + \frac{i\{r\sin\theta - r^{n+1} - r^{n+1}\sin(n+1)\theta + r^{n+2}\sin n\theta\}}{1-2r\cos\theta+r^2}\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ であるから，この両辺の実部を比較して

$$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} r^k\cos k\theta = \frac{1-r\cos\theta - r^{n+1}\cos(n+1)\theta + r^{n+2}\cos n\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}}$$

(3) $0 < r < 1$ より

$$|r^{n+1}\cos(n+1)\theta| \leqq r^{n+1}, \quad |r^{n+2}\cos n\theta| \leqq r^{n+2}, \quad \lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

上の諸式および (2) の結果により

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} r^k\cos k\theta = \frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\mathrm{P}(p,\ 0)$ から楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ に引いた 2 本の接線は，x 軸に関して対称である．この 2 本の接線が直交するとき，それらの傾きは ±1 であるから，接線の 1 つは

$$y=x-p$$

である．楕円およびこの直線を x 軸をもとに y 軸方向に $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小すると

$$x^2+y^2=1,\quad 2y=x-p$$

上の円と直線は接するので，原点と直線 $x-2y-p=0$ の距離は 1 である．

したがって $$\frac{|-p|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=1$$

$p>0$ に注意して，これを解くと $\boldsymbol{p=\sqrt{5}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 最初に平面に接していた面を A とする．

(i) $n=1$ のとき，A 以外の面が底面になるから $\boldsymbol{p_1=0}$

(ii) $n=2$ のとき，1 回目の操作で A は側面にあり，2 回目の操作で A が底面になるから $\boldsymbol{p_2=\dfrac{1}{3}}$

(iii) $n=3$ のとき，2 回目の操作で A が側面にあり，3 回目の操作で A が底面になるから

$$p_3=(1-p_2)\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

(2) n 回目の操作で A が側面にあり，$n+1$ 回目の操作で A が底面になるから

$$p_{n+1}=(1-p_n)\times\frac{1}{3}\quad \text{ゆえに}\quad p_{n+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{4}\right)$$

数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{4}\right\}$ は，初項 $p_1-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}$，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{p_n=\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ であるから

$$\begin{aligned} z^{4n+1}=z^{4n}z &= \left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^{4n}(1+i) \\ &= (\sqrt{2})^{4n}(\cos n\pi+i\sin n\pi)(1+i) \\ &= 4^n(-1)^n(1+i)=\boldsymbol{(-4)^n(1+i)} \end{aligned}$$

(2) 真数は正であるから

$$a-b>0,\quad a>0,\quad b>0 \quad ゆえに \quad \frac{a}{b}>1$$

$2\log_{10}(a-b)=\log_{10}a+\log_{10}b$ より

$$\log_{10}(a-b)^2=\log_{10}ab \quad すなわち \quad (a-b)^2=ab$$

ゆえに　$a^2-3ab+b^2=0$　したがって　$\left(\frac{a}{b}\right)^2-3\left(\frac{a}{b}\right)+2=0$

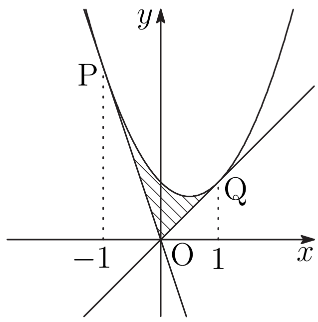
$\frac{a}{b}>1$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$

(3) $\cos 2\theta+\cos\theta=0$ より　$(2\cos^2\theta-1)+\cos\theta=0$

ゆえに　$(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)=0$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$ であるから　$\boldsymbol{\theta=60^\circ,\ 180^\circ,\ 300^\circ}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 原点から放物線 $y=x^2+ax+1$ に引いた接線を $y=kx$ とする．この 2 式から y を消去すると



$$x^2+ax+1=kx$$

整理すると　$x^2+(a-k)x+1=0 \quad \cdots(*)$

この 2 次方程式は重解をもつから

$$(a-k)^2-4\cdot1\cdot1=0 \quad \text{ゆえに} \quad k=a\pm2$$

2 次方程式 $(*)$ の重解は　$-\dfrac{a-k}{2\cdot1}=\pm1$

よって，接点の座標は　**$(\pm1,\ \pm a+2)$ (複号同順)**

(2) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{0}\{(x^2+ax+1)-(a-2)x\}\,dx \\ &\qquad\qquad + \int_{0}^{1}\{(x^2+ax+1)-(a+2)x\}\,dx \\ &= \int_{-1}^{0}(x+1)^2\,dx+\int_{0}^{1}(x-1)^2\,dx \\ &= \left[\,\frac{1}{3}(x+1)^3\,\right]_{-1}^{0}+\left[\,\frac{1}{3}(x-1)^3\,\right]_{0}^{1}=\boldsymbol{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

解説 一般に，放物線 C と 2 接線 ℓ_1，ℓ_2 について，次が成り立つ (九大 2009 年一般前期文系数学 $\boxed{\mathbf{4}}$ の補足[1]を参照．)．

1. 放物線 C 上の 2 点 P，Q におけるそれぞれの接線 ℓ_1，ℓ_2 の交点の x 座標は，2 点 P，Q の中点の x 座標である．
2. C と直線 PQ で囲まれた部分の面積を S_0，C と 2 接線 ℓ_1，ℓ_2 で囲まれた部分の面積を S とすると
$$S=\frac{1}{2}S_0$$

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf