平成16年度　琉球大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・農・教育学部　平成16年2月25日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B・C(120分)
- 農・教育 [理科教育・技術教育・学校心理学・児童教育・障害児教育・情報教育コース・教育カウンセリングA群] 学部は，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数I・II・A・B(60分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = (5+\sqrt{26})^{n-1} + (5-\sqrt{26})^{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ と定義する．

(1) すべての自然数 n に対して，$a_{n+2} = 10a_{n+1} + a_n$ であることを示せ．

(2) すべての自然数 n に対して，a_n は自然数であることを示せ．

(3) 実数 $(5+\sqrt{26})^{99}$ を無限小数で表すと，小数第1位から小数第99位までの数字がすべて0であることを示せ．$-0.1 < 5-\sqrt{26} < 0$ を証明なしで用いてよい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の問に答えよ．

(1) 関数 $y = x\sqrt{x+1}$ のグラフをかけ．

(2) 曲線 $y^2 = x^2(x+1)$ を図示せよ．

(3) t を実数とする．このとき，曲線 C と直線 $l : y = tx$ の原点以外の交点Pの座標を t を用いて表せ．

(4) 点Pの x 座標と y 座標がともに正であるとき，曲線 C と直線 l で囲まれた部分の面積 $f(t)$ と求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 次の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n} < \frac{3}{2} + \int_2^{100} \frac{dx}{x}$ を示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n}$ の小数点以下を四捨五入して得られる整数を求めよ．ただし，必要ならば $\log 2$，$\log 5$ の近似値として，それぞれ 0.693 , 1.609 を用いよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の問に答えよ．

(1) 極方程式 $r = \dfrac{1}{2 + \sqrt{3}\cos\theta}$ の表す曲線を直交座標に関する方程式で表し，それを図示せよ．

(2) $0 < a < 1$ とする．曲線 $y = x^2$ と $y = a\sin x$ の原点以外の交点の x 座標を $m(a)$ で表すとき，$\displaystyle\lim_{a\to+0} m(a) = 0$ であることを示せ．さらに，$\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{m(a)}{a}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ xy 平面上に原点を中心とする半径 1 の円 C がある．また，点 D を $(2,\ 0)$ とする．点 P が円 C 上を動くとし，線分 PD を $1-t:t$ に内分する点を Q とする．ただし，t は $0 < t < 1$ の定数である．

(1) 点 Q は，どのような曲線を描くか．曲線を表す方程式を求めよ．

(2) 点 D を通り，円 C と接する接線の方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた接線は点 Q が描く曲線と接することを示せ．また，その接点の座標を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ xy 平面上において $y = |\,x-c\,|$ と $y=1$，$x=2$ で囲まれた四角形の部分を y 軸に関して回転させてできる回転体の体積を $f(c)$ とする．ただし，$1 < c < 2$ とする．

(1) $f(c)$ を求めよ．

(2) $f(c)$ が最大となる c を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $$(\alpha+\beta)(\alpha^n+\beta^n)=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}+\alpha\beta(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$$

$\alpha=5+\sqrt{26}$，$\beta=5-\sqrt{26}$ とおくと　$\alpha+\beta=10$，$\alpha\beta=-1$

ゆえに　$10(\alpha^n+\beta^n)=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}-(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$

したがって　$10a_{n+1}=a_{n+2}-a_n$　よって　$a_{n+2}=10a_{n+1}+a_n$

(2) $a_1=2$，$a_2=\alpha+\beta=10$ であるから，(1) の結果から，すべての自然数 n に対して，a_n は自然数である．

(3) $-0.1<5-\sqrt{26}<0$ より，$0<-\beta<0.1$ であるから

$$0<(-\beta)^{99}<0.1^{99}\quad\text{すなわち}\quad 0<-\beta^{99}<0.1^{99}\quad\cdots①$$

$a_{100}=\alpha^{99}+\beta^{99}$ であるから　$-\beta^{99}=\alpha^{99}-a_{100}\quad\cdots②$

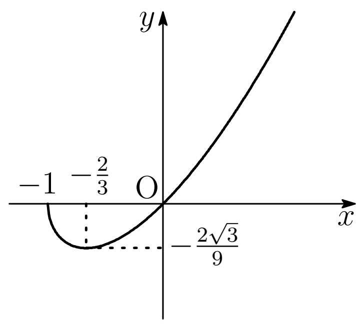
①，② より　$0<\alpha^{99}-a_{100}<0.1^{99}$

(2) の結果から a_{100} は自然数であるから，α^{99}，すなわち，$(5+\sqrt{26})^{99}$ の小数第 1 位から小数第 99 位までの数字がすべて 0 である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y=x\sqrt{x+1}$ の定義域は　$x\geqq -1$

$$y'=\sqrt{x+1}+\frac{x}{2\sqrt{x+1}}=\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

$$y''=\frac{3\cdot 2\sqrt{x+1}-(3x+2)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}}{4(x+1)}=\frac{3x+4}{4(x+1)\sqrt{x+1}}$$



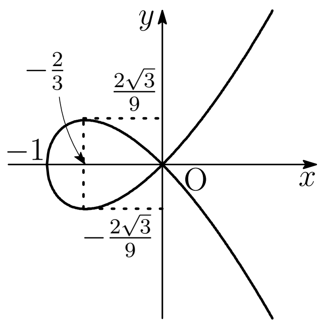
下の増減表から，グラフは右のようになる．

x	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y''		$+$	$+$	$+$
y	0	↘	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↗

(2) $C : y^2 = x^2(x+1)$ より

$$y = \pm x\sqrt{x+1}$$

$y = -x\sqrt{x+1}$ は $y = x\sqrt{x+1}$ と x 軸に関して対称であるから，(1) のグラフを利用すると，右のようになる．



(3) $y^2 = x^2(x+1)$，$y = tx$ から，y を消去すると

$$(tx)^2 = x^2(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad x^2(t^2 - x - 1) = 0$$

$x \neq 0$ であるから，$t \neq \pm 1$ のとき　$x = t^2 - 1$，$y = t(t^2 - 1)$

よって　　$\mathbf{P}(\boldsymbol{t^2 - 1},\ \boldsymbol{t^3 - t})$

$t = \pm 1$ のとき，原点以外の交点は存在しない．

(4) P の x 座標と y 座標がともに正であるから

$$t^2 - 1 > 0 \quad \text{かつ} \quad t(t^2 - 1) > 0 \quad \text{すなわち} \quad t > 1$$

$f(t)$ は $y = tx$ と $y = x\sqrt{x+1}$ で囲まれた部分の面積であるから

$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_0^{t^2-1} (tx - x\sqrt{x+1})\,dx \\
&= \int_0^{t^2-1} \{tx - (x+1)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{2}}\}\,dx \\
&= \left[\,\frac{1}{2}tx^2 - \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\,\right]_0^{t^2-1} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{10}t^5 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t - \frac{4}{15}}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $$\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\sum_{n=3}^{100}\frac{1}{n}$$
$$<\frac{3}{2}+\sum_{n=3}^{100}\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x}=\frac{3}{2}+\int_{2}^{100}\frac{dx}{x}$$

(2) (1) の結果および $\log 2=0.693$，$\log 5=1.609$ から

$$\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n}<\frac{3}{2}+\Big[\ \log x\ \Big]_{2}^{100}=\frac{3}{2}+\log\frac{100}{2}$$
$$=\frac{3}{2}+\log 2+2\log 5=5.411,$$
$$\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n}>\sum_{n=1}^{100}\int_{n}^{n+1}\frac{dx}{x}$$
$$=\int_{1}^{101}\frac{dx}{x}=\log 101$$
$$>\log 100=2(\log 2+\log 5)=4.604$$

よって，求める整数は　**5**

補足 $$\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{100}+\sum_{n=4}^{99}\frac{1}{n}$$
$$>\frac{553}{300}+\sum_{n=4}^{99}\int_{n}^{n+1}\frac{dx}{x}=\frac{553}{300}+\int_{4}^{100}\frac{dx}{x}=\frac{553}{300}+2\log 5>5$$

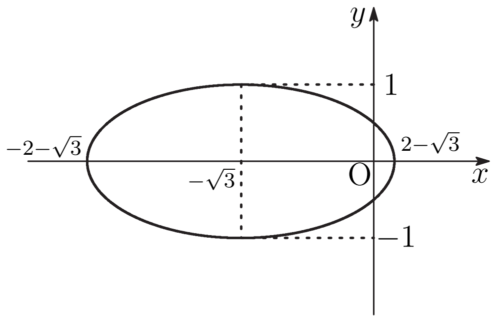
$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $r=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}\cos\theta}$ より，$x=r\cos\theta$ に注意して

$$2r+\sqrt{3}r\cos\theta=1 \quad \text{ゆえに} \quad 2r=1-\sqrt{3}x$$

$r^2=x^2+y^2$ に注意して，両辺を平方すると

$$4(x^2+y^2)=1-2\sqrt{3}x+3x^2$$

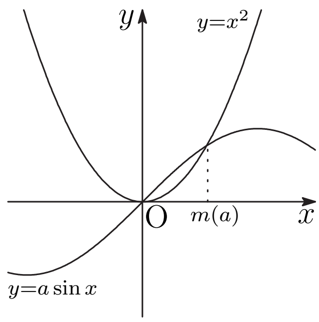
よって $\quad \boldsymbol{\dfrac{(x+\sqrt{3})^2}{4}+y^2=1}$



これは，楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を x 軸方向に $-\sqrt{3}$ だけ平行移動したもので，右の図のようになる．

(2) $0<a<1$ のとき，$y=x^2$ と $y=a\sin x$ の交点の x 座標 $m(a)$ は，$m(a)>0$ であり

$$\{m(a)\}^2=a\sin m(a) \quad \cdots ①$$



このとき，$a\sin m(a)\leqq a$ であるから

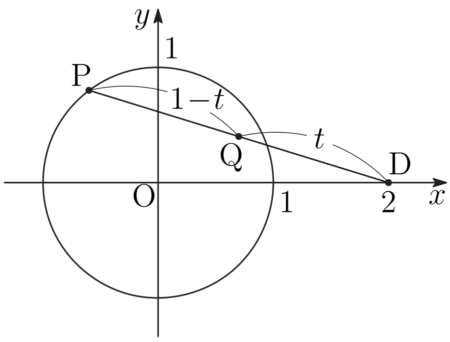
$$0<m(a)\leqq\sqrt{a}$$

上式から，はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{a\to+0}m(a)=0 \quad \cdots ②$

① から $\quad \dfrac{m(a)}{a}=\dfrac{\sin m(a)}{m(a)}$

上式および ② から $\quad \displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{m(a)}{a}=\lim_{m(a)\to+0}\frac{\sin m(a)}{m(a)}=\mathbf{1}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) P$(\cos\theta,\ \sin\theta)$，Q$(x,\ y)$ とおくと，
Q は PD を $1-t:t$ に内分するから



$$x = t\cos\theta + 2(1-t), \quad y = t\sin\theta$$

上の 2 式から θ を消去することにより，
Q の描く曲線の方程式は

$$\boldsymbol{\{x-2(1-t)\}^2 + y^2 = t^2} \quad \cdots ①$$

(2) 求める接線は y 軸に平行ではないから

$$y = m(x-2) \quad \text{すなわち} \quad mx - y - 2m = 0$$

とおく．原点からこの直線までの距離が C の半径 1 に等しいから

$$\frac{|-2m|}{\sqrt{m^2+1}} = 0 \quad \text{これを解いて} \quad m = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

よって，求める接線の方程式は　$\boldsymbol{y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-2)} \quad \cdots ②$

(3) ② を ① に代入すると

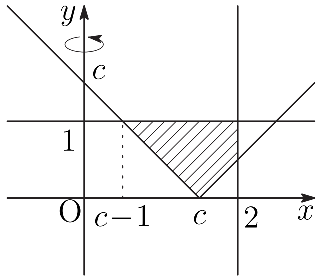
$$\begin{aligned}
\{(x-2)+2t\}^2 + \frac{1}{3}(x-2)^2 &= t^2 \\
\frac{4}{3}(x-2)^2 + 4t(x-2) + 3t^2 &= 0 \\
(x-2)^2 + 3t(x-2) + \frac{9}{4}t^2 &= 0 \\
\left(x - 2 + \frac{3}{2}t\right)^2 &= 0
\end{aligned}$$

したがって　$x = 2 - \dfrac{3}{2}t$　これを ② に代入して　$y = \mp\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

① と ② は接する．また，接点の座標は

$$\boldsymbol{\left(2 - \frac{3}{2}t,\ \mp\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)} \quad \text{(複号同順)}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $y = |\,x - c\,|$ と $y = 1$，$x = 2$ で囲まれた部分は，次の図の斜線部分である．



したがって

$$
\begin{aligned}
\frac{f(c)}{2\pi} &= \int_{c-1}^{2} x(1 - |\,x - c\,|)\,dx \\
&= \int_{c-1}^{c} x(x - c + 1)\,dx + \int_{c}^{2} x(-x + c + 1)\,dx \\
&= \left[\,\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(c-1)x^2\,\right]_{c-1}^{c} + \left[\,-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(c+1)x^2\,\right]_{c}^{2} \\
&= -\frac{1}{6}c^3 - \frac{1}{2}c^2 + \frac{5}{2}c - \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

よって　　$\boldsymbol{f(c) = \frac{\pi}{3}(-c^3 - 3c^2 + 15c - 5)}$

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$$

(2) (1) の結果から　$f'(c) = \pi(-c^2 - 2c + 5)$

$1 < c < 2$ に注意して，$f'(c) = 0$ を解くと　$c = \sqrt{6} - 1$

したがって，$f(c)$ の増減表は，次のようになる．

c	(1)	$\cdots$	$\sqrt{6}-1$	$\cdots$	(2)
$f'(c)$		$+$	0	$-$	
$f(c)$		↗	極大	↘	

よって，$f(c)$ が最大となる c の値は　$\boldsymbol{c = \sqrt{6} - 1}$