

平成 15 年度 琉球大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

理・工・医・農・教育学部 平成 15 年 2 月 25 日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部 [1] [2] [3] [4] 数 I・II・III・A・B・C(120 分)
- 農・教育 [理科教育・技術教育・学校心理学・児童教育・障害児教育・情報教育
コース・教育カウンセリング A 群] 学部 [5] [6] 数 I・II・A・B(60 分)

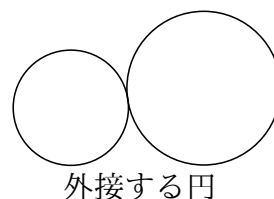
[1] 次の問いに答えよ.

(1) 関数 $y = x^2 \sin(3x + 5)$ の導関数を求めよ.

(2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \cos x - \frac{1}{2} \right| dx$ の値を求めよ.

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n+k}{n^4} \right)^{\frac{1}{3}}$ の値を求めよ.

[2] 円 $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ に外接し、直線 $x = -1$ に接する円の中心の軌跡を C とする. 次の問いに答えよ. ただし、ふたつの円が外接するとは、右の図のような状態のことである.



(1) C の方程式を求めよ.

(2) 点 $(2, 0)$ を通る直線が C と 2 点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) で交わるとき、 y_1 と y_2 の積 $y_1 y_2$ の値を求めよ.

[3] α, β は $0 \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とする. $\alpha \leq t \leq \beta$ となる t に対して、

$$S(t) = \int_{\alpha}^{\beta} |\sin x - \sin t| dx$$

とおく. $S(t)$ を最小にする t の値を求めよ.

[4] 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) I_1 を求めよ. さらに、すべての自然数 n に対して、 $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ が成り立つことを示せ.

(2) 不等式 $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ が成り立つことを示せ.

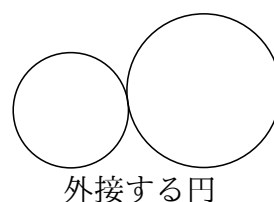
(3) これらの結果を使って、 $\log 2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ が成り立つことを示せ.

5 次の問いに答えよ.

(1) z を $z^2 + z + 1 = 0$ を満たす複素数とすると、 $z^3 = 1$ が成り立つことを示し、さらに $\frac{1}{(i - z^n)(i - z^{2n})}$ の値を求めよ. ただし、 i は虚数単位、 n は自然数とする.

(2) $\left(x - \frac{5}{x^2}\right)^6$ を展開したときの x を含まない項を求めよ.

6 円 $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ に外接し、直線 $y = -1$ に接する円の中心の軌跡を C とする. 次の問いに答えよ. ただし、ふたつの円が外接するとは、右の図のような状態のことである.



- (1) C の方程式を求めよ.
- (2) C 上の 2 点 $(x_1, 2)$, $(x_2, 2)$ における C の接線の方程式を求めよ.
- (3) C と (2) で求めた 2 つの接線で囲まれた部分の面積を求めよ.

解答例

1 (1) $y' = 2x \sin(3x + 5) + 3x^2 \cos(3x + 5)$

$$\begin{aligned} (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \cos x - \frac{1}{2} \right| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \cos x \right) dx \\ &= \left[\sin x - \frac{x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{x}{2} - \sin x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n+k}{n^4} \right)^{\frac{1}{3}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{3}} dx = \left[\frac{3}{4} (1+x)^{\frac{4}{3}} \right]_0^1 = \frac{3}{2} \sqrt[3]{2} - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

2 (1) $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ より $(x-2)^2 + y^2 = 1$

この円の中心は $(2, 0)$ で半径 1 の円であるから、 C 上の点を (x, y) とすると、 $x > -1$ であるから、条件により

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} - 1 = x - (-1) \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = x + 2$$

平方すると $(x-2)^2 + y^2 = (x+2)^2$ 整理すると $y^2 = 8x$

(2) 点 $(2, 0)$ を通り、 C と 2 点で交わる直線を $x = my + 2$ とおく。
これと C から x を消去すると

$$y^2 = 8(my + 2) \quad \text{ゆえに} \quad y^2 - 8my - 16 = 0$$

この方程式の解が y_1, y_2 であるから、解と係数の関係により

$$y_1 y_2 = -16$$

3 $0 \leq \alpha \leq t \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}
 S(t) &= \int_{\alpha}^{\beta} |\sin x - \sin t| dx \\
 &= \int_{\alpha}^t (\sin t - \sin x) dx + \int_t^{\beta} (\sin x - \sin t) dx \\
 &= \left[x \sin t + \cos x \right]_{\alpha}^t + \left[-\cos x - x \sin t \right]_t^{\beta} \\
 &= 2(t \sin t + \cos t) - (\alpha + \beta) \sin t - \cos \alpha - \cos \beta
 \end{aligned}$$

これを微分すると $S'(t) = (2t - \alpha - \beta) \cos t$

したがって、 $S(t)$ の増減表は次のようになる。

t	α	\cdots	$\frac{\alpha+\beta}{2}$	\cdots	β
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$		\searrow	極小	\nearrow	

よって、 $S(t)$ を最小にする t の値は $t = \frac{\alpha + \beta}{2}$ ■

$$\begin{aligned}
 \boxed{4} \quad (1) \quad I_1 &= \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx \\
 &= \left[x - \log(1+x) \right]_0^1 = \mathbf{1} - \mathbf{\log 2}, \\
 I_n + I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \\
 &= \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n+1}}
 \end{aligned}$$

(2) $0 \leq x \leq 1$ のとき, $\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$ であるから

$$\int_0^1 \frac{x^n}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx \quad \text{よって} \quad \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

(3) $I_k + I_{k+1} = \frac{1}{k+1}$ より, $-(-1)^{k-1}I_k + (-1)^k I_{k+1} = \frac{(-1)^k}{k+1}$ であるから,
 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n-1} \{-(-1)^{k-1}I_k + (-1)^k I_{k+1}\} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \\
 -I_1 + (-1)^{n-1}I_n &= \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}
 \end{aligned}$$

上式に (1) の結果を代入すると

$$-(1 - \log 2) + (-1)^{n-1}I_n = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

したがって $\log 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = (-1)^n I_n$

(2) の結果から, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ であるから

$$\log 2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$



5 (1) $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$ に $z^2 + z + 1 = 0$ を代入すると

$$z^3 - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad z^3 = 1$$

$$z^2 + z + 1 = 0 \text{ を解いて } z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi$$

$z^2 + z + 1 = 0$ の2つの複素数の解 z, \bar{z} について

$$z + \bar{z} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad \bar{z} = -z - 1$$

また, $z^2 + z + 1 = 0$ より, $z^2 = -z - 1$ であるから $z^2 = \bar{z}$ したがって

$$\begin{aligned} (i - z^n)(i - z^{2n}) &= (i - z^n)(i - \bar{z}^n) \\ &= -i(z^n + \bar{z}^n) \\ &= -i \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right)^n - i \left(\cos \frac{2}{3}\pi - i \sin \frac{2}{3}\pi \right)^n \\ &= -i \left(\cos \frac{2n}{3}\pi + i \sin \frac{2n}{3}\pi \right) - i \left(\cos \frac{2n}{3}\pi - i \sin \frac{2n}{3}\pi \right) \\ &= -2i \cos \frac{2n}{3} \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad \frac{1}{(i - z^n)(i - z^{2n})} = \frac{1}{-2i \cos \frac{2n}{3}\pi} = \frac{i}{2 \cos \frac{2n}{3}\pi}$$

よって 自然数 n が 3 の倍数のとき $\frac{i}{2}$
 自然数 n が 3 の倍数でないとき $-i$

(2) $\left(x - \frac{5}{x^2}\right)^6$ の展開式の一般項は

$${}_6C_k x^{6-k} \left(-\frac{5}{x^2}\right)^k = {}_6C_k (-5)^k x^{6-3k}$$

定数項 (x を含まない項) は, $6 - 3k = 0$, すなわち $k = 2$ より

$${}_6C_2 (-5)^2 = \mathbf{375}$$



6 (1) $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ より $x^2 + (y - 2)^2 = 1$

この円の中心は $(0, 2)$ で半径 1 の円であるから、 C 上の点を (x, y) とすると、 $y > -1$ であるから、条件により

$$\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} - 1 = y - (-1) \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = y + 2$$

平方すると $x^2 + (y - 2)^2 = (y + 2)^2$ 整理すると $y = \frac{1}{8}x^2$

(2) (1) で求めた C の方程式に $y = 2$ を代入すると

$$2 = \frac{1}{8}x^2 \quad \text{これを解いて} \quad x = \pm 4$$

$y = \frac{1}{8}x^2$ を微分すると $y' = \frac{1}{4}x$

C の点 $(4, 2)$ における接線の傾きは 1 であるから、その方程式は

$$y - 2 = (x - 4) \quad \text{すなわち} \quad y = x - 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

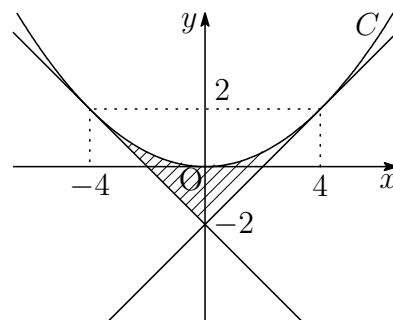
C の点 $(-4, 2)$ における接線の傾きは -1 であるから、その方程式は

$$y - 2 = -(x + 4) \quad \text{すなわち} \quad y = -x - 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

(3) C と ①, ② で囲まれた図形は y 軸に関して対称であるから、求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \int_0^4 \left\{ \frac{1}{8}x^2 - (x - 2) \right\} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{24} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^4 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

よって $S = \frac{16}{3}$



補足 $\frac{S}{2} = \int_0^4 \left\{ \frac{1}{8}x^2 - (x - 2) \right\} dx = \int_0^4 \frac{1}{8}(x - 4)^2 dx = \left[\frac{1}{24}(x - 4)^3 \right]_0^4 = \frac{8}{3}$ ■