平成 15 年度　琉球大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・農・教育学部　平成 15 年 2 月 25 日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B・C(120 分)
- 農・教育 [理科教育・技術教育・学校心理学・児童教育・障害児教育・情報教育コース・教育カウンセリング A 群] 学部は，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B(60 分)

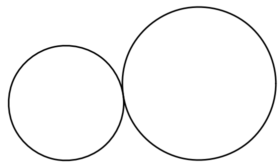
$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = x^2 \sin(3x+5)$ の導関数を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\cos x - \frac{1}{2}\right| dx$ の値を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n+k}{n^4}\right)^{\frac{1}{3}}$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 円 $x^2+y^2-4x+3=0$ に外接し，直線 $x=-1$ に接する円の中心の軌跡を C とする．次の問に答えよ．ただし，ふたつの円が外接するとは，右の図のような状態のことである．



外接する円

(1) C の方程式を求めよ．

(2) 点 $(2,\ 0)$ を通る直線が C と 2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ で交わるとき，y_1 と y_2 の積 y_1y_2 の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ α，β は $0 \leqq \alpha < \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする．$\alpha \leqq t \leqq \beta$ となる t に対して，

$$S(t) = \int_\alpha^\beta |\sin x - \sin t|\, dx$$

とおく．$S(t)$ を最小にする t の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，$I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$ とおく．次の問に答えよ．

(1) I_1 を求めよ．さらに，すべての自然数 n に対して，$I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$ が成り立つことを示せ．

(2) 不等式 $\dfrac{1}{2(n+1)} \leqq I_n \leqq \dfrac{1}{n+1}$ が成り立つことを示せ．

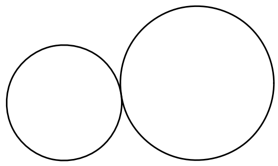
(3) これらの結果を使って，$\log 2 = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問いに答えよ．

(1) z を $z^2+z+1=0$ を満たす複素数とするとき，$z^3=1$ が成り立つことを示し，さらに $\dfrac{1}{(i-z^n)(i-z^{2n})}$ の値を求めよ．ただし，i は虚数単位，n は自然数とする．

(2) $\left(x-\dfrac{5}{x^2}\right)^6$ を展開したときの x を含まない項を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 円 $x^2+y^2-4y+3=0$ に外接し，直線 $y=-1$ に接する円の中心の軌跡を C とする．次の問に答えよ．ただし，ふたつの円が外接するとは，右の図のような状態のことである．



外接する円

(1) C の方程式を求めよ．

(2) C 上の 2 点 $(x_1,\ 2)$，$(x_2,\ 2)$ における C の接線の方程式を求めよ．

(3) C と (2) で求めた 2 つの接線で囲まれた部分の面積を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\boldsymbol{y' = 2x\sin(3x+5) + 3x^2\cos(3x+5)}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\cos x - \frac{1}{2}\right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \cos x\right) dx$

$$= \left[\ \sin x - \frac{x}{2}\ \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[\ \frac{x}{2} - \sin x\ \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \boldsymbol{\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}}$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+k}{n^4}\right)^{\frac{1}{3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n}$

$$= \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{3}}\,dx = \left[\ \frac{3}{4}(1+x)^{\frac{4}{3}}\ \right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt[3]{2} - \frac{3}{4}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ より　$(x-2)^2 + y^2 = 1$

この円の中心は $(2,\ 0)$ で半径 1 の円であるから，C 上の点を $(x,\ y)$ とすると，$x > -1$ であるから，条件により

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} - 1 = x - (-1) \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = x + 2$$

平方すると　$(x-2)^2 + y^2 = (x+2)^2$　　整理すると　$\boldsymbol{y^2 = 8x}$

(2) 点 $(2,\ 0)$ を通り，C と 2 点で交わる直線を $x = my + 2$ とおく．

これと C から x を消去すると

$$y^2 = 8(my+2) \quad \text{ゆえに} \quad y^2 - 8my - 16 = 0$$

この方程式の解が y_1，y_2 であるから，解と係数の関係により

$$\boldsymbol{y_1 y_2 = -16}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $0 \leqq \alpha < \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$
\begin{aligned}
S(t) &= \int_{\alpha}^{\beta} |\sin x - \sin t|\, dx \\
&= \int_{\alpha}^{t} (\sin t - \sin x)\, dx + \int_{t}^{\beta} (\sin x - \sin t)\, dx \\
&= \Big[x \sin t + \cos x \Big]_{\alpha}^{t} + \Big[-\cos x - x \sin t \Big]_{t}^{\beta} \\
&= 2(t \sin t + \cos t) - (\alpha + \beta)\sin t - \cos\alpha - \cos\beta
\end{aligned}
$$

これを微分すると　$S'(t) = (2t - \alpha - \beta)\cos t$

したがって，$S(t)$ の増減表は次のようになる．

t	α	$\cdots$	$\frac{\alpha+\beta}{2}$	$\cdots$	β
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，$S(t)$ を最小にする t の値は　$\boldsymbol{t = \dfrac{\alpha + \beta}{2}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1)

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= \Big[\ x - \log(1+x)\ \Big]_0^1 = \mathbf{1 - \log 2},$$

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^n\,dx = \Big[\ \frac{x^{n+1}}{n+1}\ \Big]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{n+1}}$$

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$\dfrac{x^n}{2} \leqq \dfrac{x^n}{1+x} \leqq x^n$ であるから

$$\int_0^1 \frac{x^n}{2}\,dx \leqq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \leqq \int_0^1 x^n\,dx \quad \text{よって} \quad \frac{1}{2(n+1)} \leqq I_n \leqq \frac{1}{n+1}$$

(3) $I_k + I_{k+1} = \dfrac{1}{k+1}$ より，$-(-1)^{k-1}I_k + (-1)^k I_{k+1} = \dfrac{(-1)^k}{k+1}$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}\{-(-1)^{k-1}I_k + (-1)^k I_{k+1}\} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

$$-I_1 + (-1)^{n-1}I_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

上式に (1) の結果を代入すると

$$-(1-\log 2) + (-1)^{n-1}I_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

したがって
$$\log 2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = (-1)^n I_n$$

(2) の結果から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ であるから

$$\log 2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)$ に $z^2+z+1=0$ を代入すると

$$z^3-1=0 \quad \text{ゆえに} \quad z^3=1$$

$z^2+z+1=0$ を解いて　$z=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$

$z^2+z+1=0$ の 2 つの複素数の解 z，$\overline{z}$ について

$$z+\overline{z}=-1 \quad \text{ゆえに} \quad \overline{z}=-z-1$$

また，$z^2+z+1=0$ より，$z^2=-z-1$ であるから　$z^2=\overline{z}$
したがって

$$\begin{aligned}(i-z^n)(i-z^{2n})&=(i-z^n)(i-\overline{z}^n)\\&=-i(z^n+\overline{z}^n)\\&=-i\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)^n-i\left(\cos\frac{2}{3}\pi-i\sin\frac{2}{3}\pi\right)^n\\&=-i\left(\cos\frac{2n}{3}\pi+i\sin\frac{2n}{3}\pi\right)-i\left(\cos\frac{2n}{3}\pi-i\sin\frac{2n}{3}\pi\right)\\&=-2i\cos\frac{2n}{3}\end{aligned}$$

ゆえに　$\dfrac{1}{(i-z^n)(i-z^{2n})}=\dfrac{1}{-2i\cos\frac{2n}{3}\pi}=\dfrac{i}{2\cos\frac{2n}{3}\pi}$

よって　**自然数 n が 3 の倍数のとき**　$\boldsymbol{\dfrac{i}{2}}$

自然数 n が 3 の倍数でないとき　$\boldsymbol{-i}$

(2) $\left(x-\dfrac{5}{x^2}\right)^6$ の展開式の一般項は

$${}_6\mathrm{C}_k x^{6-k}\left(-\frac{5}{x^2}\right)^k={}_6\mathrm{C}_k(-5)^k x^{6-3k}$$

定数項 (x を含まない項) は，$6-3k=0$，すなわち $k=2$ より

$${}_6\mathrm{C}_2(-5)^2=\mathbf{375}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $x^2+y^2-4y+3=0$ より　$x^2+(y-2)^2=1$

この円の中心は $(0,\ 2)$ で半径 1 の円であるから，C 上の点を $(x,\ y)$ とすると，$y>-1$ であるから，条件により

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2}-1=y-(-1)\quad \text{ゆえに}\quad \sqrt{x^2+(y-2)^2}=y+2$$

平方すると　$x^2+(y-2)^2=(y+2)^2$　整理すると　$\boldsymbol{y=\frac{1}{8}x^2}$

(2) (1) で求めた C の方程式に $y=2$ を代入すると

$$2=\frac{1}{8}x^2\quad \text{これを解いて}\quad x=\pm 4$$

$y=\dfrac{1}{8}x^2$ を微分すると　$y'=\dfrac{1}{4}x$

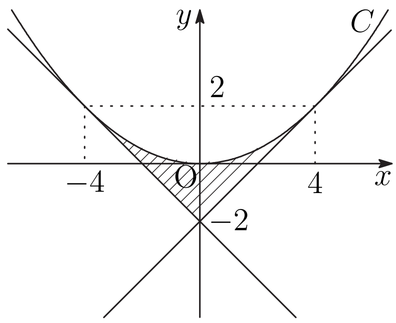
C の点 $(4,\ 2)$ における接線の傾きは 1 であるから，その方程式は

$$y-2=(x-4)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=x-2}\quad \cdots ①$$

C の点 $(-4,\ 2)$ における接線の傾きは -1 であるから，その方程式は

$$y-2=-(x+4)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=-x-2}\quad \cdots ②$$

(3) C と ①，② で囲まれた図形は y 軸に関して対称であるから，求める面積を S とすると



$$\frac{S}{2}=\int_0^4\left\{\frac{1}{8}x^2-(x-2)\right\}dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{24}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^4=\frac{8}{3}$$

よって　$\boldsymbol{S=\frac{16}{3}}$

補足 $\dfrac{S}{2}=\displaystyle\int_0^4\left\{\frac{1}{8}x^2-(x-2)\right\}dx=\int_0^4\frac{1}{8}(x-4)^2\,dx=\left[\frac{1}{24}(x-4)^3\right]_0^4=\frac{8}{3}$