平成14年度　琉球大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・農・教育学部　平成14年2月25日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B・C(120分)
- 農・教育 [理科教育・技術教育・学校心理学・児童教育・障害児教育・情報教育コース・教育カウンセリングA群] 学部は，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数I・II・A・B(60分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ A を2次正方行列とする．$A^2 + A + E = O$ が成立するとき，次の問いに答えよ．ただし，E は単位行列，O は零行列である．

(1) $A^3 = E$ を示せ．

(2) $(A - E)(2A^2 + A)$ および $(A - tE)(A^2 + tA + t^2E)$ を計算する事により，すべての実数 t に対して $A - tE$ は逆行列をもつ事を示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ A，B，Cの3人が自分の名前を書いたカードを各自3枚ずつ1つの箱の中に入れる．この箱の中からA，B，Cの順にそれぞれ1枚ずつカードを引くとする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，引いたカードは元に戻さないものとする．

(1) ひとりだけが自分以外の名前のカードを引く確率を求めよ．

(2) ひとりだけが自分の名前のカードを引く確率を求めよ．

(3) 全員が自分以外の名前のカードを引く確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $1 \leqq a \leqq e$ とする．$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，曲線 $y = e^x - a$ と x 軸で挟まれた部分の面積を $S(a)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $S(a)$ を求めよ．

(2) $S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\dfrac{2}{\pi}x < \sin x$ が成り立つ事を示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{r\to\infty} r \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2 \sin x} dx$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 複素数 $1+2i$ を解にもつ実数係数の x の 2 次方程式で，x^2 の係数が 1 であるものを求めよ．

(2) a，b を実数とする．4 次方程式 $x^4-x^3+2x^2+ax+b=0$ が $1+2i$ を解にもつとき，a，b の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ $0 \leqq m \leqq 1$ とする．$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，曲線 $y=x^2$ と直線 $y=mx$ で挟まれた部分の面積を $S(m)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $S(m)$ を求めよ．

(2) $S(m)$ が最小となる m の値と，そのときの $S(m)$ の値を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $A^3-E=(A-E)(A^2+A+E)$ であるから，$A^2+A+E=O$ のとき

$$A^3-E=(A-E)O \quad \text{ゆえに} \quad A^3=E$$

(2) $A^2=-A-E$，$A^3=E$ であるから

$$\begin{aligned}(A-E)(2A^2+A)&=(A-E)\{2(-A-E)+A\}\\&=(A-E)(-A-2E)\\&=-A^2-A+2E\\&=-(-A-E)-A+2E=3E\\(A-tE)(A^2+tA+t^2E)&=A^3-t^3E\\&=E-t^3E=(1-t^3)E\end{aligned}$$

したがって　$t=1$ のとき　$(A-tE)^{-1}=\dfrac{1}{3}(2A^2+A)$

$t\neq 1$ のとき　$(A-tE)^{-1}=\dfrac{1}{1-t^3}(A^2+tA+t^2E)$

よって，すべての実数 t に対して $A-tE$ は逆行列をもつ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) A だけが自分以外の名前のカードを引く確率は，右の計算から

$$\frac{1}{28}+\frac{1}{28}=\frac{1}{14}$$

A	B	C	確率
B	B	C	$\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{1}{28}$
C	B	C	$\frac{3}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{1}{28}$

B または C が自分以外の名前のカードを引く確率もこれに等しい．

よって，求める確率は　$\dfrac{1}{14}\times 3=\mathbf{\dfrac{3}{14}}$

(2) A だけが自分の名前のカードを引く確率は，右の計算から

$$\frac{2}{168}+\frac{6}{168}+\frac{6}{168}+\frac{9}{168}=\frac{23}{168}$$

A	B	C	確率
A	A	A	$\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{2}{168}$
A	A	B	$\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{6}{168}$
A	C	A	$\frac{3}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{6}{168}$
A	C	B	$\frac{3}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{9}{168}$

B または C だけが自分の名前のカードを引く確率もこれに等しい．

よって，求める確率は　$\dfrac{23}{168}\times 3=\mathbf{\dfrac{23}{56}}$

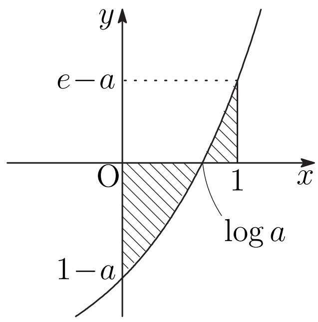
(3) A，B，C の 3 人が自分の名前のカードを引く確率は

$$\frac{3}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{56}$$

求める確率は，これと (1)，(2) の余事象の確率であるから

$$1-\left(\frac{3}{56}+\frac{3}{14}+\frac{23}{56}\right)=\mathbf{\frac{9}{28}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y = e^x - a$ と x 軸との交点の x 座標は



$$e^x - a = 0 \quad \text{すなわち} \quad x = \log a$$

$e^x - a$ の原始関数の 1 つを

$$F(x) = e^x - ax$$

とおくと

$$\begin{aligned} S(a) &= -\int_0^{\log a} (e^x - a)\,dx + \int_{\log a}^1 (e^x - a)\,dx \\ &= -\Big[\,F(x)\,\Big]_0^{\log a} + \Big[\,F(x)\,\Big]_{\log a}^1 \\ &= F(0) + F(1) - 2F(\log a) \\ &= 1 + (e - a) - 2(a - a\log a) \\ &= \boldsymbol{2a\log a - 3a + e + 1} \end{aligned}$$

(2) (2) の結果から　　$S'(a) = 2\log a - 1$

したがって，$S(a)$ の増減表は $(1 \leqq a \leqq e)$

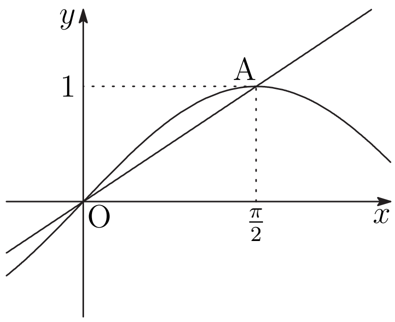
a	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	e
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	極小	↗	

よって　$\boldsymbol{a = \sqrt{e}}$ のとき最小値 $S(\sqrt{e}\,) = \boldsymbol{e - 2\sqrt{e} + 1}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=\sin x$ とすると　　$f''(x)=-\sin x$

ゆえに，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において　$f''(x)<0$

曲線 $y=f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{2},\ 1\right)$ を通る直線を $y=g(x)$ とすると



$$g(x)=\frac{2}{\pi}x$$

曲線 $y=f(x)$ は，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において上に凸であるから

$$g(x)<f(x) \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{2}{\pi}x<\sin x$$

(2) (1) の結果から，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$-r^2\sin x<-\frac{2r^2}{\pi}x \quad \text{ゆえに} \quad 0<e^{-r^2\sin x}<e^{-\frac{2r^2}{\pi}x}$$

したがって　　$0<\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-r^2\sin x}\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2r^2}{\pi}x}\,dx$

ここで　　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{2r^2}{\pi}x}\,dx=\left[-\frac{\pi}{2r^2}e^{-\frac{2r^2}{\pi}x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2r^2}\left(1-e^{-r^2}\right)$

上の 2 式から，$r>0$ のとき

$$0<r\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-r^2\sin x}\,dx<\frac{\pi}{2r}(1-e^{-r^2})$$

$\displaystyle\lim_{r\to\infty}\frac{\pi}{2r}(1-e^{-r^2})=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{r\to\infty}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-r^2\sin x}\,dx=\mathbf{0}$$

5 (1) 実数係数の2次方程式が$1+2i$を解にもつとき，これと共役な複素数$1-2i$もこの方程式の解であるから，

$$(1+2i)+(1-2i)=2, \quad (1+2i)(1-2i)=5$$

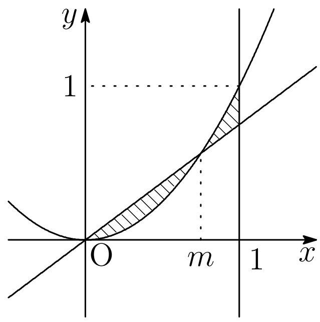
よって，求める方程式は　$\boldsymbol{x^2-2x+5=0}$

(2) 実数係数の4次方程式$x^4-x^3+2x^2+ax+b=0$が$1+2i$を解にもつので，これと共役な複素数$1-2i$もこの方程式の解である．したがって，(1)の結果から4次式$x^4-x^3+2x^2+ax+b$はx^2-2x+5を因数にもつ．

$$x^4-x^3+2x^2+ax+b=(x^2-2x+5)(x^2+x-1)+(a-7)x+(b+5)$$

上式から　$a-7=0,\ b+5=0$　すなわち　$\boldsymbol{a=7,\ b=-5}$

6 (1) $y=x^2$と$y=mx$の共有点のx座標は



$x^2=mx$　これを解いて　$x=0,\ m$

x^2-mxの原始関数の1つを

$$F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{m}{2}x^2$$

とおく．$0 \leqq m \leqq 1$より，$S(m)$は

$$\begin{aligned} S(m) &= -\int_0^m (x^2-mx)\,dx+\int_m^1 (x^2-mx)\,dx \\ &= -\Big[\ F(x)\ \Big]_0^m+\Big[\ F(x)\ \Big]_m^1 \\ &= F(0)+F(1)-2F(m) \\ &= 0+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}m\right)-2\left(-\frac{1}{6}m^3\right)=\boldsymbol{\frac{1}{3}m^3-\frac{1}{2}m+\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

(2) (1)の結果から　$S'(m)=m^2-\dfrac{1}{2}$

したがって，$S(m)$の増減表は次のようになる．

m	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$S'(m)$		$-$	0	$+$	
$S(m)$		↘	極小	↗	

よって　$\boldsymbol{m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$のとき最小値$S\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\boldsymbol{\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}}$