平成13年度　琉球大学２次試験前期日程(数学問題)
理・工・医・農・教育学部　平成13年2月25日

- 理・工・医・教育[数学]学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B・C(120分)
- 農・教育[理科教育・技術教育・学校心理学・児童教育・障害児教育・情報教育コース・教育カウンセリングA群]学部は，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数I・II・A・B(60分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ aを実数とする．2次方程式 $x^2-2ax+a+\dfrac{1}{4}=0$ について，次の問いに答えよ．

(1) 実数解をもつとき，aの値の範囲を求めよ．

(2) 2つの解の差が1であるとき，aの値の範囲を求めよ．

(3) すべての解が1より大きい実数であるとき，aの値の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 放物線 $y=1-x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 1-t^2)$ における接線を L とする．ただし，$0<t<1$ とする．接線 L と x 軸，y 軸との交点をそれぞれA，Bとする．次の問いに答えよ．

(1) 接線 L の方程式と，点Aの x 座標を求めよ．

(2) 放物線 $y=1-x^2$ と線分PBおよび y 軸で囲まれる部分の面積を $S(t)$，放物線 $y=1-x^2$ と線分PAおよび点Aを通る y 軸に平行な直線で囲まれる部分の面積を $T(t)$ とする．$\displaystyle\lim_{t\to 0}\{S(t)\cdot T(t)\}$ を求めよ．

(3) $0<t<1$ の範囲で面積の和 $S(t)+T(t)$ が最小になる t の値を a とする．このとき $S(a)>T(a)$ を示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を B，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) B を求めよ．

(2) $A^2=2\alpha A-\alpha^2 E$ をみたす実数 α を求めよ．

(3) (2)の実数 α と自然数 n について，等式 $\alpha^n B^n=n\alpha B-(n-1)E$ を数学的帰納法によって証明せよ．

(4) A^{100} を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $x<1$ のとき $f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left\{\left((1-x)e^x+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を定積分を使って表し，$f(x)$ を求めよ．

(2) $\lim_{x\to 1} f(x)=-1$ を示せ．ただし，$\lim_{t\to 0} t\log|\,t\,|=0$ は既知としてよい．

(3) $x<1$ の範囲で，$f(x)$ の極値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ i を虚数単位とする．次の問いに答えよ．

(1) $\alpha=1+i$，$\beta=\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ のとき，複素数 $\frac{1}{\alpha}$ と $\frac{1}{\beta}$ の実部を求めよ．

(2) 複素数平面上に半径 1 の円と，それに内接する正六角形 ABCDEF がある．A$(1+i)$，B$\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)$，C$\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$ のとき，この円の中心を表す複素数を求めよ．

(3) (2) の正六角形の 6 つの頂点 A，B，C，D，E，F を表す複素数の総和を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 2 つの実数 α，β について，定積分 $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$ を求めよ．ただし，$\alpha<\beta$ とする．

(2) 座標平面上の点 A(1, 2) を通る傾き a の直線を L とする．直線 L と放物線 $y=x^2$ との 2 つの交点の x 座標を求めよ．

(3) (2) の直線 L と放物線 $y=x^2$ で囲まれる面積が最小になる a の値と，そのときの面積を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x^2-2ax+a+\dfrac{1}{4}=0$　$(*)$ の判別式を D とすると

$$D=(-2a)^2-4\cdot1\cdot\left(a+\frac{1}{4}\right)=4a^2-4a-1$$

2 次方程式 $(*)$ が実数解をもつとき，$D\geqq0$ であるから

$4a^2-4a-1\geqq0$　これを解いて　$\boldsymbol{a\leqq\dfrac{1-\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\leqq a}$

(2) 2 つの解の差は　$\dfrac{2a+\sqrt{D}}{2}-\dfrac{2a-\sqrt{D}}{2}=\sqrt{D}$

このとき　$\sqrt{D}=1$　ゆえに　$D=1$

したがって　$4a^2-4a-1=1$　ゆえに　$2a^2-2a-1=0$

これを解いて　$\boldsymbol{a=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}}$

(3) $(*)$ の解について，次式が成り立てばよいから

$$\frac{2a-\sqrt{D}}{2}>1\quad\text{ゆえに}\quad 2(a-1)>\sqrt{D}$$

したがって　$\begin{cases}a-1>0\\4(a-1)^2>4a^2-4a-1\end{cases}$　これを解いて　$1<a<\dfrac{5}{4}$

よって，上の結果と (1) の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\leqq a<\dfrac{5}{4}}$

別解 $f(x)=x^2-2ax+a+\dfrac{1}{4}=(x-a)^2-\dfrac{D}{4}$ であるから

$$a>1,\quad f(1)>0,\quad -\frac{D}{4}\leqq0$$

すなわち　$a>1,\quad -a+\dfrac{5}{4}>0,\quad 4a^2-4a-1\geqq0$

これを解いて　$\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\leqq a<\dfrac{5}{4}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y = 1 - x^2$ を微分すると　$y' = -2x$

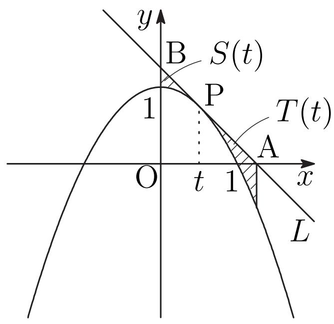
したがって，L は点 $(t,\ 1 - t^2)$ を通り傾き $-2t$ の直線であるから

$$y - (1 - t^2) = -2t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -2tx + t^2 + 1}$$

L と x 軸との接点の x 座標は $(0 < t < 1)$

$$-2tx + t^2 + 1 = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x = \frac{t^2 + 1}{2t}}$$

(2) (1) の結果から



$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t \{(-2tx + t^2 + 1) - (1 - x^2)\}dx \\ &= \int_0^t (x - t)^2\,dt \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - t)^3\right]_0^t = \frac{1}{3}t^3 \end{aligned}$$

$$T(t) = \int_t^{\frac{t^2+1}{2t}} (x - t)^2\,dx = \left[\frac{1}{3}(x - t)^3\right]_t^{\frac{t^2+1}{2t}} = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{t} - t\right)^3$$

したがって　$S(t)T(t) = \dfrac{1}{3}t^3 \cdot \dfrac{1}{24}\left(\dfrac{1}{t} - t\right)^3 = \dfrac{1}{72}(1 - t^2)^3$

よって　$\displaystyle\lim_{t \to 0}\{S(t) \cdot T(t)\} = \lim_{t \to 0}\frac{1}{72}(1 - t^2)^3 = \boldsymbol{\frac{1}{72}}$

(3) (2) の結果から　$S'(t) = t^2$，$T'(t) = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{t} - t\right)^2\left(-\dfrac{1}{t^2} - 1\right)$

$S(t) + T(t)$ は $t = a$ で最小となるので，$S'(a) + T'(a) = 0$ より

$$\begin{aligned} a^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{a} - a\right)^2\left(-\frac{1}{a^2} - 1\right) &= 0 \\ \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{24}\left(\frac{1}{a} - a\right)^2\left(\frac{1}{a} + a\right) &= 0 \\ \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{24}\left(\frac{1}{a} - a\right)^3 &= \frac{a}{12}\left(\frac{1}{a} - a\right)^2 \end{aligned}$$

$0 < a < 1$ であるから　$S(a) - T(a) = \dfrac{a}{12}\left(\dfrac{1}{a} - a\right)^2 > 0$

よって　$S(a) > T(a)$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $B = A^{-1} = \mathbf{\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}$

(2) ハミルトン・ケリーの定理を $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ に適用すると

$$A^2 - 6A + 9E = O \quad \cdots ①$$

① と $A^2 = 2\alpha A - \alpha^2 E$ から　　$2(\alpha - 3)A = (\alpha^2 - 9)E$

$\alpha - 3 \neq 0$ のとき，A は E の実数倍となり，A に反する．

したがって　　$\boldsymbol{\alpha = 3}$

(3) ① の両辺に B^2 をかけると

$$E - 6B + 9B^2 = O \quad ゆえに \quad 9B^2 = 6B - E \quad \cdots ②$$

証明する等式 $3^nB^n = 3nB - (n-1)E$ を $(*)$ とする．

i) $n = 1$ のとき

$$(*) の左辺 = 3B, \quad (*) の右辺 = 3{\cdot}1B - (1-1)E = 3B$$

よって，$n = 1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

ii) $n = k$ のとき，

$$3^kB^k = 3kB - (k-1)E$$

が成り立つと仮定すると，② を利用して

$$\begin{aligned} 3^{k+1}B^{k+1} &= 3B(3^kB^k) \\ &= 3B\{3kB - (k-1)E\} \\ &= k(9B^2) - 3(k-1)B \\ &= k(6B - E) - 3(k-1)B \\ &= 3(k+1)B - kE \end{aligned}$$

i)，ii) より，すべての自然数 n について $(*)$ が成り立つ．

(4) (1) の結果を $(*)$ の右辺に代入すると

$$3^n B^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -n+3 & -n \\ n & n+3 \end{pmatrix}$$

ゆえに
$$\begin{pmatrix} -n+3 & -n \\ n & n+3 \end{pmatrix} = 3^{n+1} B^n$$

上式の両辺に A^n を右から掛けると

$$\begin{pmatrix} -n+3 & -n \\ n & n+3 \end{pmatrix} A^n = 3^{n+1} E$$

さらに上式の両辺に $\begin{pmatrix} -n+3 & -n \\ n & n+3 \end{pmatrix}^{-1}$ を左から掛けると

$$\begin{aligned} A^n &= 3^{n+1}\begin{pmatrix} -n+3 & -n \\ n & n+3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= 3^{n-1}\begin{pmatrix} n+3 & n \\ -n & -n+3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これに $n = 100$ を代入して

$$\boldsymbol{A^{100} = 3^{99}\begin{pmatrix} 103 & 100 \\ -100 & -97 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $t=(1-x)e^x$ とおくと ($x<1$ より $t>0$)

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(t+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\log(t+u)\,du \\ &= \Big[\,(t+u)\log(t+u)\,\Big]_0^1-\int_0^1 du=(t+1)\log(t+1)-t\log t-1 \\ &= \boldsymbol{\{(1-x)e^x+1\}\log\{(1-x)e^x+1\}} \\ &\qquad\qquad \boldsymbol{-(1-x)e^x\log(1-x)e^x-1} \end{aligned}$$

(2) $x<1$ において $x\longrightarrow 1$ のとき，$t\longrightarrow +0$ であるから，$\displaystyle\lim_{t\to+0}t\log t=0$ に注意して (長崎大学 2007 年一般前期数学 $\boxed{\mathbf{5}}$ の補足[1]を参照)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to1}f(x) &= \lim_{t\to+0}\{(t+1)\log(t+1)-t\log t-1\} \\ &= 1\log1-0-1=\mathbf{-1} \end{aligned}$$

(3) $f(x)=(t+1)\log(t+1)-t\log t-1$ を微分すると

$$f'(x)=\{\log(t+1)-\log t\}\frac{dt}{dx}$$

$\log(t+1)-\log t>0$，$\dfrac{dt}{dx}=-e^x+(1-x)e^x=-xe^x$ であるから，
$f(x)$ の増減表は，次のようになる ($x=0$ のとき $t=1$).

x	$\cdots$	0	$\cdots$	(1)
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\nearrow$	$2\log2-1$	$\searrow$	

よって，$\boldsymbol{x=0}$ のとき**極大値** $\mathbf{2\log2-1}$ をとる.

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2007.pdf

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{1-i}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

$\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{2}{(2-\sqrt{3})+i}=\dfrac{2\{(2-\sqrt{3})-i\}}{(2-\sqrt{3})^2+1}=\dfrac{(2-\sqrt{3})-i}{2(2-\sqrt{3})}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}i$

よって　$\dfrac{1}{\alpha}$，$\dfrac{1}{\beta}$ ともに実部は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(2) $z_{\mathrm{A}}=1+i$，$z_{\mathrm{B}}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}$，$z_{\mathrm{C}}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}$，

円の中心を $\mathrm{G}(z_{\mathrm{G}})$ とおくと

$$\begin{aligned}
z_{\mathrm{G}}-z_{\mathrm{B}}&=(z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{B}})+(z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{B}})\\
z_{\mathrm{G}}&=z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{B}}+z_{\mathrm{C}}\\
&=(1+i)-\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)\\
&=1
\end{aligned}$$

よって，円の中心を表す複素数は $\mathbf{1}$

(3) $\mathrm{D}(z_{\mathrm{D}})$，$\mathrm{E}(z_{\mathrm{E}})$，$\mathrm{F}(z_{\mathrm{F}})$ とする．

D，E，F は G に関して，それぞれ A，B，C と対称である．

よって，求める 6 つの頂点 A，B，C，D，E，F の表す複素数の和は

$$\begin{aligned}
&z_{\mathrm{A}}+z_{\mathrm{B}}+z_{\mathrm{C}}+z_{\mathrm{C}}+z_{\mathrm{D}}+z_{\mathrm{E}}+z_{\mathrm{F}}\\
=&(z_{\mathrm{A}}+z_{\mathrm{D}})+(z_{\mathrm{B}}+z_{\mathrm{E}})+(z_{\mathrm{C}}+z_{\mathrm{F}})\\
=&2z_{\mathrm{G}}+2z_{\mathrm{G}}+2z_{\mathrm{G}}\\
=&6z_{\mathrm{G}}=6\cdot 1=\mathbf{6}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \int_\alpha^\beta (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\,dx$

$$= \int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx$$

$$= \left[\ \frac{1}{3}(x-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\ \right]_\alpha^\beta$$

$$= \boldsymbol{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

(2) L は点 $(1,\ 2)$ を通り，傾き a の直線であるから

$$y-2=a(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y=ax-a+2$$

L と放物線 $y=x^2$ の方程式から y を消去して

$$x^2=ax-a+2 \quad \text{すなわち} \quad x^2-ax+a-2=0 \quad \cdots(*)$$

求める共有点の x 座標は，$(*)$ を解いて　$\boldsymbol{x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4a+8}}{2}}$

(3) 2 次方程式 $(*)$ の 2 つの解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\beta-\alpha=\frac{a+\sqrt{a^2-4a+8}}{2}-\frac{a-\sqrt{a^2-4a+8}}{2}=\sqrt{a^2-4a+8}$$

L と放物線 $y=x^2$ で囲まれた部分の面積を S とすると

$$S=\int_\alpha^\beta (ax-a+2-x^2)\,dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(\sqrt{a^2-4a+8}\,)^3$$

ここで　　$a^2-4a+8=(a-2)^2+4$

よって，S は，$\boldsymbol{a=2}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$ をとる．