平成 13 年度　琉球大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・農・教育学部　平成 13 年 2 月 25 日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部　1　2　3　4　数 I・II・III・A・B・C(120 分)
- 農・教育 [理科教育・技術教育・学校心理学・児童教育・障害児教育・情報教育コース・教育カウンセリング A 群] 学部　5　6　数 I・II・A・B(60 分)

1 a を実数とする．2 次方程式 $x^2-2ax+a+\dfrac{1}{4}=0$ について，次の問いに答えよ．

(1) 実数解をもつとき，a の値の範囲を求めよ．

(2) 2 つの解の差が 1 であるとき，a の値を求めよ．

(3) すべての解が 1 より大きい実数であるとき，a の値の範囲を求めよ．

2 放物線 $y=1-x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 1-t^2)$ における接線を L とする．ただし，$0<t<1$ とする．接線 L と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ A，B とする．次の問いに答えよ．

(1) 接線 L の方程式と，点 A の x 座標を求めよ．

(2) 放物線 $y=1-x^2$ と線分 PB および y 軸で囲まれる部分の面積を $S(t)$，放物線 $y=1-x^2$ と線分 PA および点 A を通る y 軸に平行な直線で囲まれる部分の面積を $T(t)$ とする．$\displaystyle\lim_{t\to 0}\{S(t)\cdot T(t)\}$ を求めよ．

(3) $0<t<1$ の範囲で面積の和 $S(t)+T(t)$ が最小になる t の値を a とする．このとき $S(a)>T(a)$ を示せ．

3 行列 $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を B，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) B を求めよ．

(2) $A^2=2\alpha A-\alpha^2 E$ をみたす実数 α を求めよ．

(3) (2) の実数 α と自然数 n について，等式 $\alpha^n B^n=n\alpha B-(n-1)E$ を数学的帰納法によって証明せよ．

(4) A^{100} を求めよ．

4 $x<1$ のとき $f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left\{\left((1-x)e^x+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を定積分を使って表し，$f(x)$ を求めよ．

(2) $\lim_{x\to1}f(x)=-1$ を示せ．ただし，$\lim_{t\to0}t\log|t|=0$ は既知としてよい．

(3) $x<1$ の範囲で，$f(x)$ の極値を求めよ．

5 i を虚数単位とする．次の問いに答えよ．

(1) $\alpha=1+i$，$\beta=\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ のとき，複素数 $\frac{1}{\alpha}$ と $\frac{1}{\beta}$ の実部を求めよ．

(2) 複素数平面上に半径 1 の円と，それに内接する正六角形 ABCDEF がある．A$(1+i)$，B$\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$，C$\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$ のとき，この円の中心を表す複素数を求めよ．

(3) (2) の正六角形の 6 つの頂点 A，B，C，D，E，F を表す複素数の総和を求めよ．

6 次の問いに答えよ．

(1) 2 つの実数 α，β について，定積分 $\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$ を求めよ．ただし，$\alpha<\beta$ とする．

(2) 座標平面上の点 A$(1,\ 2)$ を通る傾き a の直線を L とする．直線 L と放物線 $y=x^2$ との 2 つの交点の x 座標を求めよ．

(3) (2) の直線 L と放物線 $y=x^2$ で囲まれる面積が最小になる a の値と，そのときの面積を求めよ．

解答例

1 (1) $x^2-2ax+a+\dfrac{1}{4}=0$ $(*)$ の判別式を D とすると

$$D=(-2a)^2-4\cdot 1\cdot\left(a+\frac{1}{4}\right)=4a^2-4a-1$$

2 次方程式 $(*)$ が実数解をもつとき，$D\geqq 0$ であるから

$$4a^2-4a-1\geqq 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a\leqq\frac{1-\sqrt{2}}{2},\ \frac{1+\sqrt{2}}{2}\leqq a}$$

(2) 2 つの解の差は $\dfrac{2a+\sqrt{D}}{2}-\dfrac{2a-\sqrt{D}}{2}=\sqrt{D}$

このとき $\sqrt{D}=1$ ゆえに $D=1$

したがって $4a^2-4a-1=1$ ゆえに $2a^2-2a-1=0$

これを解いて $\boldsymbol{a=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}}$

(3) $(*)$ の解について，次式が成り立てばよいから

$$\frac{2a-\sqrt{D}}{2}>1 \quad \text{ゆえに} \quad 2(a-1)>\sqrt{D}$$

したがって $\begin{cases} a-1>0 \\ 4(a-1)^2>4a^2-4a-1 \end{cases}$ これを解いて $1<a<\dfrac{5}{4}$

よって，上の結果と (1) の共通範囲を求めて $\boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\leqq a<\dfrac{5}{4}}$

別解 $f(x)=x^2-2ax+a+\dfrac{1}{4}=(x-a)^2-\dfrac{D}{4}$ であるから

$$a>1,\quad f(1)>0,\quad -\frac{D}{4}\leqq 0$$

すなわち $a>1,\quad -a+\dfrac{5}{4}>0,\quad 4a^2-4a-1\geqq 0$

これを解いて $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\leqq a<\dfrac{5}{4}$ ■

2 (1) $y=1-x^2$ を微分すると　$y'=-2x$

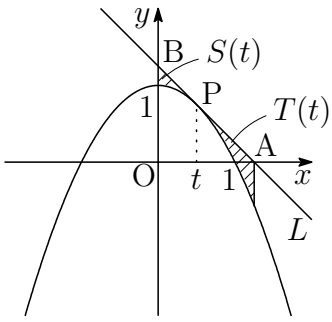
したがって，L は点 $(t,\ 1-t^2)$ を通り傾き $-2t$ の直線であるから

$$y-(1-t^2)=-2t(x-t)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=-2tx+t^2+1}$$

L と x 軸との接点の x 座標は $(0<t<1)$

$$-2tx+t^2+1=0\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{x=\frac{t^2+1}{2t}}$$

(2) (1) の結果から



$$\begin{aligned}S(t)&=\int_0^t\{(-2tx+t^2+1)-(1-x^2)\}dx\\&=\int_0^t(x-t)^2\,dt\\&=\left[\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_0^t=\frac{1}{3}t^3\end{aligned}$$

$$T(t)=\int_t^{\frac{t^2+1}{2t}}(x-t)^2\,dx=\left[\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_t^{\frac{t^2+1}{2t}}=\frac{1}{24}\left(\frac{1}{t}-t\right)^3$$

したがって　$S(t)T(t)=\dfrac{1}{3}t^3\cdot\dfrac{1}{24}\left(\dfrac{1}{t}-t\right)^3=\dfrac{1}{72}(1-t^2)^3$

よって　$\displaystyle\lim_{t\to0}\{S(t)\cdot T(t)\}=\lim_{t\to0}\frac{1}{72}(1-t^2)^3=\boldsymbol{\frac{1}{72}}$

(3) (2) の結果から　$S'(t)=t^2$，$T'(t)=\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{t}-t\right)^2\left(-\dfrac{1}{t^2}-1\right)$

$S(t)+T(t)$ は $t=a$ で最小となるので，$S'(a)+T'(a)=0$ より

$$a^2+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{a}-a\right)^2\left(-\frac{1}{a^2}-1\right)=0$$

$$\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{24}\left(\frac{1}{a}-a\right)^2\left(\frac{1}{a}+a\right)=0$$

$$\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{24}\left(\frac{1}{a}-a\right)^3=\frac{a}{12}\left(\frac{1}{a}-a\right)^2$$

$0<a<1$ であるから　$S(a)-T(a)=\dfrac{a}{12}\left(\dfrac{1}{a}-a\right)^2>0$

よって　$S(a)>T(a)$

別解 $f(t)=S(t)+T(t)$ おくと $(0<t<1)$

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{3}t^3+\frac{1}{24}\left(\frac{1}{t}-t\right)^3,\\
f'(t) &= t^2+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{t}-t\right)^2\left(-\frac{1}{t^2}-1\right)\\
&= \frac{1}{8}\left(7t^2+1+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^4}\right)=\frac{1}{8}\left(7t^2+1-\frac{1-t^2}{t^4}\right)\\
f''(t) &= \frac{1}{8}\left(14t-\frac{2}{t^3}+\frac{4}{t^5}\right)=\frac{1}{4}\left(7t+\frac{2-t^2}{t^5}\right)>0
\end{aligned}
$$

$f'(t)$ は $0<t<1$ において単調増加であり

$$\lim_{t\to+0}f'(t)=-\infty,\quad \lim_{t\to1-0}f'(t)=1>0$$

これから，$f'(t)=0$ を満たす a $(0<a<1)$ がただ一つ存在する．

t	(0)	$\cdots$	a	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

また

$$S'(t)=t^2>0,\quad T'(t)=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{t}-t\right)^2\left(-\frac{1}{t^2}-1\right)<0$$

上の 2 式から，$g(t)=S(t)-T(t)$ とおくと，$g(t)$ は単調増加．$g(t)=0$ を満たす t の値は $(0<t<1)$

$$\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{24}\left(\frac{1}{t}-t\right)^3=0\quad \text{ゆえに}\quad t=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-t\right)$$

これを解いて　$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　このとき，増減表から

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{3}<0\quad \text{ゆえに}\quad \frac{1}{\sqrt{3}}<a$$

したがって　$g\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)<g(a)$　ゆえに　$0<S(a)-T(a)$

よって　$S(a)>T(a)$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $B = A^{-1} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

(2) ハミルトン・ケリーの定理を $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ に適用すると

$$A^2 - 6A + 9E = O \quad \cdots ①$$

① と $A^2 = 2\alpha A - \alpha^2 E$ から　　$2(\alpha - 3)A = (\alpha^2 - 9)E$

$\alpha - 3 \neq 0$ のとき，A は E の実数倍となり，A に反する．

したがって　　$\boldsymbol{\alpha = 3}$

(3) ① の両辺に B^2 をかけると

$$E - 6B + 9B^2 = O \quad \text{ゆえに} \quad 9B^2 = 6B - E \quad \cdots ②$$

証明する等式 $3^n B^n = 3nB - (n-1)E$ を $(*)$ とする．

i) $n = 1$ のとき

$$(*) \text{ の左辺} = 3B, \quad (*) \text{ の右辺} = 3{\cdot}1B - (1-1)E = 3B$$

よって，$n = 1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

ii) $n = k$ のとき，

$$3^k B^k = 3kB - (k-1)E$$

が成り立つと仮定すると，② を利用して

$$\begin{aligned} 3^{k+1}B^{k+1} &= 3B(3^k B^k) \\ &= 3B\{3kB - (k-1)E\} \\ &= k(9B^2) - 3(k-1)B \\ &= k(6B - E) - 3(k-1)B \\ &= 3(k+1)B - kE \end{aligned}$$

i)，ii) より，すべての自然数 n について $(*)$ が成り立つ．

(4) (1) の結果を $(*)$ の右辺に代入すると

$$3^n B^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -n+3 & -n \\ n & n+3 \end{pmatrix}$$

ゆえに
$$\begin{pmatrix} -n+3 & -n \\ n & n+3 \end{pmatrix} = 3^{n+1}B^n$$

上式の両辺に A^n を右から掛けると

$$\begin{pmatrix} -n+3 & -n \\ n & n+3 \end{pmatrix} A^n = 3^{n+1}E$$

さらに上式の両辺に $\begin{pmatrix} -n+3 & -n \\ n & n+3 \end{pmatrix}^{-1}$ を左から掛けると

$$\begin{aligned} A^n &= 3^{n+1}\begin{pmatrix} -n+3 & -n \\ n & n+3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= 3^{n-1}\begin{pmatrix} n+3 & n \\ -n & -n+3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これに $n = 100$ を代入して

$$\boldsymbol{A^{100} = 3^{99}\begin{pmatrix} 103 & 100 \\ -100 & -97 \end{pmatrix}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $t=(1-x)e^x$ とおくと ($x<1$ より $t>0$)

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(t+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\log(t+u)\,du \\ &= \Big[\,(t+u)\log(t+u)\,\Big]_0^1-\int_0^1 du=(t+1)\log(t+1)-t\log t-1 \\ &= \boldsymbol{\{(1-x)e^x+1\}\log\{(1-x)e^x+1\}} \\ &\qquad\qquad \boldsymbol{-(1-x)e^x\log(1-x)e^x-1} \end{aligned}$$

(2) $x<1$ において $x\longrightarrow 1$ のとき，$t\longrightarrow +0$ であるから，$\displaystyle\lim_{t\to+0}t\log t=0$ に注意して (長崎大学 2007 年一般前期数学 $\boxed{5}$ の補足[1] を参照)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to1}f(x) &= \lim_{t\to+0}\{(t+1)\log(t+1)-t\log t-1\} \\ &= 1\log1-0-1=\boldsymbol{-1} \end{aligned}$$

(3) $f(x)=(t+1)\log(t+1)-t\log t-1$ を微分すると

$$f'(x)=\{\log(t+1)-\log t\}\frac{dt}{dx}$$

$\log(t+1)-\log t>0$，$\dfrac{dt}{dx}=-e^x+(1-x)e^x=-xe^x$ であるから，
$f(x)$ の増減表は，次のようになる ($x=0$ のとき $t=1$).

x	$\cdots$	0	$\cdots$	(1)
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\nearrow$	$2\log2-1$	$\searrow$	

よって，$\boldsymbol{x=0}$ のとき極大値 $\boldsymbol{2\log2-1}$ をとる． ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2007.pdf

5 (1) $\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{1-i}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$

$\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{2}{(2-\sqrt{3})+i}=\dfrac{2\{(2-\sqrt{3})-i\}}{(2-\sqrt{3})^2+1}=\dfrac{(2-\sqrt{3})-i}{2(2-\sqrt{3})}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}i$

よって　$\dfrac{1}{\alpha}$，$\dfrac{1}{\beta}$ ともに実部は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(2) $z_{\mathrm{A}}=1+i$，$z_{\mathrm{B}}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}$，$z_{\mathrm{C}}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}$，

円の中心を $\mathrm{G}(z_{\mathrm{G}})$ とおくと

$$\begin{aligned}
z_{\mathrm{G}}-z_{\mathrm{B}}&=(z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{B}})+(z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{B}})\\
z_{\mathrm{G}}&=z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{B}}+z_{\mathrm{C}}\\
&=(1+i)-\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)\\
&=1
\end{aligned}$$

よって，円の中心を表す複素数は $\mathbf{1}$

(3) $\mathrm{D}(z_{\mathrm{D}})$，$\mathrm{E}(z_{\mathrm{E}})$，$\mathrm{F}(z_{\mathrm{F}})$ とする．

D，E，F は G に関して，それぞれ A，B，C と対称である．

よって，求める 6 つの頂点 A，B，C，D，E，F の表す複素数の和は

$$\begin{aligned}
&z_{\mathrm{A}}+z_{\mathrm{B}}+z_{\mathrm{C}}+z_{\mathrm{C}}+z_{\mathrm{D}}+z_{\mathrm{E}}+z_{\mathrm{F}}\\
=&(z_{\mathrm{A}}+z_{\mathrm{D}})+(z_{\mathrm{B}}+z_{\mathrm{E}})+(z_{\mathrm{C}}+z_{\mathrm{F}})\\
=&2z_{\mathrm{G}}+2z_{\mathrm{G}}+2z_{\mathrm{G}}\\
=&6z_{\mathrm{G}}=6\cdot 1=\mathbf{6}
\end{aligned}$$

■

6 (1)
$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\,dx \\ &= \int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}\end{aligned}$$

(2) L は点 $(1,\ 2)$ を通り，傾き a の直線であるから

$$y-2=a(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y=ax-a+2$$

L と放物線 $y=x^2$ の方程式から y を消去して

$$x^2=ax-a+2 \quad \text{すなわち} \quad x^2-ax+a-2=0 \quad \cdots(*)$$

求める共有点の x 座標は，$(*)$ を解いて　$\boldsymbol{x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4a+8}}{2}}$

(3) 2 次方程式 $(*)$ の 2 つの解を α，β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\beta-\alpha=\frac{a+\sqrt{a^2-4a+8}}{2}-\frac{a-\sqrt{a^2-4a+8}}{2}=\sqrt{a^2-4a+8}$$

L と放物線 $y=x^2$ で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \int_\alpha^\beta (ax-a+2-x^2)\,dx \\ &= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(\sqrt{a^2-4a+8}\,)^3\end{aligned}$$

ここで　　$a^2-4a+8=(a-2)^2+4$

よって，S は，$\boldsymbol{a=2}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$ をとる．　■