

令和7年度 大分大学2次試験前期日程(数学問題)

理工・経済・教育・医学部 令和7年2月25日

- 理工学部 [1] [2] [3] [4] 数I・II・III・A・B・C (100分)
- 経済学部 [1] [3] [5] 数I・II・A・B・C (80分)
- 教育学部 [1] [5] [6] 数I・II・A・B・C (80分)
- 医学部 [1] [2] [4] 数I・II・III・A・B・C (80分)

[1] 正の数 x, y は、次の不等式を満たすとする。

$$(\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 \leq \log_2 \frac{y^2}{2\sqrt{2}x^2} \quad \cdots (*)$$

- (1) $X = \log_2 x, Y = \log_2 y$ とおくとき、不等式(*)を X と Y で表しなさい。
- (2) (1) で求めた不等式の表す領域を XY 平面に図示しなさい。
- (3) xy の最小値と、そのときの x と y の値を求めなさい。

[2] 三角形 ABC は $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = 5|\overrightarrow{BC}|^2$ を満たす。3点 L, M, N をそれぞれ BC, AC, AB の中点とし、 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角を θ とする。

- (1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = s(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2)$ を満たす定数 s の値を求めなさい。
- (2) 内積 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CN}$ の値を求めなさい。
- (3) $|\overrightarrow{AL}|^2 = t(|\overrightarrow{BM}|^2 + |\overrightarrow{CN}|^2)$ を満たす定数 t の値を求めなさい。
- (4) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ となるとき、 $\cos \theta$ の値を求めなさい。

- 3** AさんとBさんは赤、青、黄、緑の4枚のカードが入っている箱をそれぞれ持っている。AさんとBさんは同時に1枚ずつ各自の箱からカードを無作為に出すゲームを行い、同じ色が出たらゲームを終了する。ただし、1度出したカードは箱に戻さない。Aさんが k 枚、Bさんが k 枚カードを出した時点でゲームが終了する確率を P_k とする。ここで、 $k = 1, 2, 3$ である。

- (1) 確率 P_1 を求めなさい。
- (2) 確率 P_2 を求めなさい。
- (3) 確率 P_3 を求めなさい。

- 4** 自然数 n , k に対し、 $a_k(n) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^k$ とおく。

- (1) $a_2(25)$ を求めなさい。
- (2) $\sum_{k=1}^3 a_k(5)$ を求めなさい。
- (3) $b_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k(n)}{n}$ とおく。 b_k を k を用いて表しなさい。
- (4) (3)で求めた b_k について、 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k b_{k+1}$ を求めなさい。

5 数列 $\{a_n\}$ は, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \{2 + (-1)^n\}a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たし,

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \text{ とする.}$$

- (1) a_{2n} を a_{2n-1} を用いて表しなさい.
- (2) $n \geq 2$ のとき, a_{2n} を a_{2n-2} を用いて表しなさい.
- (3) S_n を n を用いて表しなさい.

6 以下の各問に答えなさい.

- (1) 不等式 $100 + 15(n - 6) \leq 18n$ を満たす最小の自然数 n を求めなさい.
- (2) $\triangle ABC$ において, $AB = 5$, $BC = 6$, $CA = 7$ であるとき, $\triangle ABC$ の面積を求めなさい.
- (3) 1 の 3 乗根のうち, 虚数であるものの 1 つを ω とするとき, $\omega^5 + \omega^4 + 3$ の値を求めなさい.
- (4) 2 直線 $y = 5x$, $y = \frac{2}{3}x$ のなす角 θ を求めなさい. ただし, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする.
- (5) 不等式 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x \leq 3^{2x+1}$ を解きなさい.

解答例

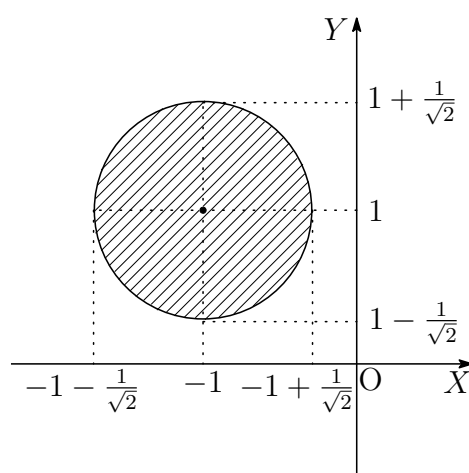
1 (1) (*) より

$$(\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 \leq -2\log_2 x + 2\log_2 y - \frac{3}{2}$$

$X = \log_2 x$, $Y = \log_2 y$ とおくと

$$X^2 + Y^2 \leq -2X + 2Y - \frac{3}{2} \quad \text{よって} \quad (X+1)^2 + (Y-1)^2 \leq \frac{1}{2}$$

(2) (1) の結果から, (*) の表す領域は, 下の図の斜線部分で境界線を含む.



(3) $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ であるから, これに

$$a = 1, b = 1, c = X + 1, d = Y - 1$$

を代入すると, (1) の結果から

$$(X+Y)^2 + (Y-X-2)^2 = 2\{(X+1)^2 + (Y-1)^2\} \leq 1$$

したがって $-1 \leq X+Y \leq 1$

$\log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y = X + Y$ より, xy が最小となるのは, $X+Y$ が最小となるときであるから

$$X+Y = -1, Y-X-2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad (X, Y) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{ゆえに} \quad \log_2 x = -\frac{3}{2}, \log_2 y = \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad (x, y) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$$

$$\text{よって} \quad x = \frac{1}{2\sqrt{2}}, y = \sqrt{2} \text{ のとき, 最小値 } \frac{1}{2}$$

別解 $\log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y = X + Y$ より, xy が最小となるのは, $X + Y$ が最小となるときであるから

$$X + Y = k$$

とおき, 直線 $X + Y - k = 0$ が (2) で示した領域と共有点をもつ k の値の範囲を求める.

$$\frac{|-1 + 1 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに} \quad -1 \leq k \leq 1$$

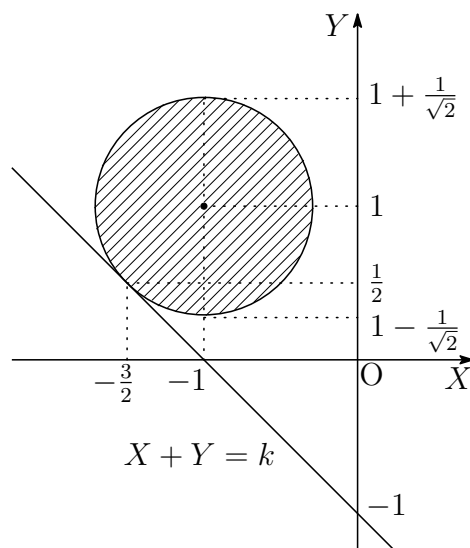
$X + Y = -1$ のとき

$$X + Y = -1, \quad (X + 1)^2 + (Y - 1)^2 = \frac{1}{2}$$

これを解いて $(X, Y) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

ゆえに $\log_2 x = -\frac{3}{2}, \log_2 y = \frac{1}{2}$ すなわち $(x, y) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$

よって $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}, y = \sqrt{2}$ のとき, 最小値 $\frac{1}{2}$



2 (1) $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = 5|\overrightarrow{BC}|^2$ より $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = 5|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|^2$

整理すると $5\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2|\overrightarrow{AB}|^2 + 2|\overrightarrow{AC}|^2$

したがって $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{2}{5} (|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2)$ よって $s = \frac{2}{5}$

(2) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{CN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\end{aligned}\quad (*)$$

(1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CN} &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) \\ &= -\frac{1}{2} (|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2) + \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{1}{2} (|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2) + \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{5} (|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2) = 0\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ および (*) から

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AL}|^2 &= \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|^2 = \frac{1}{4}(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{4}(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} (|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2) = \frac{9}{20}(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2) \\ |\overrightarrow{BM}|^2 + |\overrightarrow{CN}|^2 &= \left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|^2 \\ &= \frac{5}{4}(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2) - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{5}{4}(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2) - 2 \cdot \frac{2}{5} (|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2) = \frac{9}{20}(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2)\end{aligned}$$

上の 2 式から $|\overrightarrow{AL}|^2 = |\overrightarrow{BM}|^2 + |\overrightarrow{CN}|^2$ よって $t = 1$

(4) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ より, (1) の結果から

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2) = \frac{4}{5}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|$$

よって $\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{4}{5}$ ■

3 Aさんが1回目から4回目までに取り出したカードの色を①から④とする.

(1) AさんとBさんが取り出したカードが同じ色である場合は4通り.

$$\text{したがって} \quad P_1 = 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

(2) Aさんの2回の取り出し方の総数は ${}_4P_2$ (通り)

Bさんの1回目の取り出し方は, ③ または ④ の2通り

$$\text{したがって} \quad P_2 = {}_4P_2 \cdot 2 \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{6}$$

(3) Aさんの3回の取り出し方の総数は ${}_4P_3$ (通り)

Bさんの1回目, 2回目の取り出し方は, 次の3通り

②①, ②④, ④①

$$\text{したがって} \quad P_3 = {}_4P_3 \cdot 3 \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

補足 (P_4 を求める)

Aさんの4回の取り出し方の総数は $4!$ (通り)

Bさんの1回目, 2回目, 3回目の取り出し方は, 次の2通り

②③①, ③①②

$$\text{したがって} \quad P_4 = 4! \cdot 2 \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1\right)^2 = \frac{1}{12}$$

(4回とも同じ色のカードが出ない確率 P)

Aさんの4回の取り出し方の総数は $4!$ (通り)

Bさんの1回目から4回目の取り出し方は, 次の9通り ($M_4 = 9$)¹

②①④③, ②③④①, ②④①③,

③①④②, ③④①②, ③④②①,

④①②③, ④③①②, ④③②①

$$\text{したがって} \quad P = 4! \cdot 9 \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1\right)^2 = \frac{3}{8}$$



¹ <http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai.ri-1999.pdf> (p.15)

4 (1)

$$a_2(25) = \sum_{i=1}^{25} \left(\frac{i}{25} \right)^2 = \frac{1}{25^2} \sum_{i=1}^{25} i^2 = \frac{1}{25^2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 25 \cdot 26 \cdot 51 = \frac{\mathbf{221}}{\mathbf{25}}$$

(2)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 a_k(5) &= a_1(5) + a_2(5) + a_3(5) \\ &= \sum_{i=1}^5 \frac{i}{5} + \sum_{i=1}^5 \left(\frac{i}{5} \right)^2 + \sum_{i=1}^5 \left(\frac{i}{5} \right)^3 \\ &= \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 i + \frac{1}{5^2} \sum_{i=1}^5 i^2 + \frac{1}{5^3} \sum_{i=1}^5 i^3 \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 + \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot 6 \cdot 11 + \frac{1}{5^3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 5^2 \cdot 6^2 \\ &= 3 + \frac{11}{5} + \frac{9}{5} = \mathbf{7} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} b_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^k \\ &= \int_0^1 x^k dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k+1}} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} b_k b_{k+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{k+2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \end{aligned}$$



5 (1) (*) $a_{n+1} = \{2 + (-1)^n\}a_n$ より

$$a_{2n} = \{2 + (-1)^{2n-1}\}a_{2n-1} \quad \text{ゆえに} \quad \mathbf{a_{2n} = a_{2n-1}}$$

(2) (*) より, $n \geq 2$ のとき

$$a_{2n-1} = \{1 + (-1)^{2n-2}\}a_{2n-2} = 3a_{2n-2}$$

上式を (1) の結果に代入すると $\mathbf{a_{2n} = 3a_{2n-2}}$

(3) (1) の結果に $n = 1$ を代入すると $a_2 = a_1 = 1$

(2) の結果から $a_{2n} = a_2 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1} \quad \dots \textcircled{1}$

(1) の結果を利用すると

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k}) = \sum_{k=1}^n (a_{2k} + a_{2k}) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n a_{2k} = 2 \sum_{k=1}^n 3^{k-1} = 2 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} = 3^n - 1 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

(1) の結果および $\textcircled{1}$ から $a_{2n+1} = a_{2n+2} = 3^n$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} = 3^n - 1 + 3^n = 2 \cdot 3^n - 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ から

$$S_n = \begin{cases} 3^{\frac{n}{2}} - 1 & (n \text{ が偶数}) \\ 2 \cdot 3^{\frac{n-1}{2}} - 1 & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$



- 6** (1) $100 + 15(n - 6) \leq 18n$ を解くと $n \geq \frac{10}{3}$
これを満たす最小の自然数 n は $\mathbf{n = 4}$

- (2) $a = BC = 6$, $b = CA = 7$, $c = AB = 5$ とおくと

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(6 + 7 + 5) = 9$$

求める面積を S とすると、ヘロンの公式により

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{9(9-6)(9-7)(9-5)} = \mathbf{6\sqrt{6}} \end{aligned}$$

- (3) ω は 1 の 3 乗根であるから $\omega^3 = 1 \quad \dots \textcircled{1}$

$$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$

ω 虚数であるから、 $\omega - 1 \neq 0$ より $\omega^2 + \omega + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$

$$\begin{aligned} \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } \quad \omega^5 + \omega^4 + 3 &= \omega^3(\omega^2 + \omega) + 3 \\ &= \omega^2 + \omega + 3 \\ &= (\omega^2 + \omega + 1) + 2 = \mathbf{2} \end{aligned}$$

- (4) 2 直線 $y = 5x$, $y = \frac{2}{3}x$ の偏角 (x 軸の正の向きとなす角) をそれぞれ α , β とすると $\left(\frac{\pi}{2} > \alpha > \beta > 0\right)$

$$\tan \alpha = 5, \quad \tan \beta = \frac{2}{3}, \quad \theta = \alpha - \beta$$

したがって

$$\tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{5 - \frac{2}{3}}{1 + 5 \cdot \frac{2}{3}} = 1$$

$$\text{よって } \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

- (5) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x \leq 3^{2x+1}$ より $3^{-\frac{x}{2}} \leq 3^{2x+1}$

底 3 は 1 より大きいから $-\frac{x}{2} \leq 2x + 1$ これを解いて $x \geq -\frac{2}{5}$ ■