令和６年度　大分大学２次試験前期日程 (数学問題)
理工・経済・教育・医学部　令和６年２月２５日

- 理工学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (100 分)
- 経済学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 教育学部　$\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{5}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部　$\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (80 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数列 $\{a_n\}$ は，$a_1 = 2,\ a_{n+1} - 2a_n = 0\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たし，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とする．

(1) 一般項 a_n を n を用いて表しなさい．

(2) ${S_n}^2 + 4S_n + 4 = 2^{10}$ を満たす n の値を求めなさい．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k = 2S_n - 10$ を満たす n の値を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ n を 2 以上の自然数とする．2 つの曲線

$$C_1 : y = (x-1)^2, \quad C_2 : y = \frac{1}{n}x^2$$

について，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S_n とする．

(1) 実数 $\alpha,\ \beta$ について，$A = \beta - \alpha$ とおく．次の定積分を A を用いて表しなさい．

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\, dx$$

(2) S_n を n を用いて表しなさい．

(3) 不等式 $\left| n\sqrt{n}\, S_n - \dfrac{4}{3} \right| < \dfrac{1}{3}$ を満たす最小の自然数 n を求めなさい．

3 サイコロが2個あり，ひとつは3面が赤く，3面が黒く塗られており，もうひとつは2面が赤く，4面が黒く塗られている．これら2個のサイコロを使って次のゲームを行う．なお，2個のサイコロを同時に1回投げることを「試行」と呼ぶことにする．

- 試行を最大3回繰り返す．ただし，1回目または2回目の試行で2個とも赤い面が出れば，以降の試行は行わずゲームを終了する．
- 各試行で出た赤い面の個数の合計をゲームの得点とする．

(1) 1回の試行で赤い面がちょうど1個出る確率を求めなさい．

(2) 2回以下の試行でゲームが終了する確率を求めなさい．

(3) 起こり得るゲームの得点とその確率をすべて求めなさい．

4 xy 平面の曲線

$$C: x = 3\cos^3\theta, \quad y = 3\sin^3\theta \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

上の点Pにおける接線と，x 軸，y 軸との交点をそれぞれQ，Rとする．

(1) 点Pの座標を $(3\cos^3\theta,\ 3\sin^3\theta)$ とするとき，2点Q，Rの座標を θ を用いてそれぞれ表しなさい．

(2) 点Pが C 上を動くとき，線分QRを $1:2$ に内分する点Sの軌跡を求め，図示しなさい．

(3) (2)で得られた軌跡と x 軸，y 軸で囲まれた図形を，y 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めなさい．

(4) 曲線 C の $\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ に対応する部分の長さを求めなさい．

$\boxed{5}$ 以下の各問いに答えなさい.

(1) $0 \leqq x \leqq 3$ における 2 次関数 $y = x^2 - 2x + c$ の最大値が 1 であるとき，定数 c の値を求めなさい.

(2) △ABC において

$$\frac{\sin A}{5} = \frac{\sin B}{7} = \frac{\sin C}{8}$$

が成り立つとき，$\cos B$ の値を求めなさい.

(3) $x + \dfrac{1}{x} = 1 + \sqrt{2}$ のとき，$x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ と $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$ の値をそれぞれ求めなさい.

(4) $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，方程式

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$$

を解きなさい.

(5) $\log_{10} 2 = 0.3010$ とするとき，5^{10} の桁数を求めなさい.

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n$ より　$a_n = 2{\cdot}2^{n-1} = \boldsymbol{2^n}$

(2) (1) の結果から

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} 2^k = \frac{2(2^n-1)}{2-1} = 2^{n+1} - 2 \qquad (*)$$

${S_n}^2 + 4S_n + 4 = 2^{10}$ より　$(S_n+2)^2 = 2^{10}$

$S_n + 2 = 2^{n+1} > 0$ に注意して　$2^{n+1} = 2^5$　よって　$\boldsymbol{n = 4}$

(3) $(*)$ を $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k = 2S_n - 10$ に代入すると

$$\sum_{k=1}^{n}(2^{k+1}-2) = 2(2^{n+1}-2) - 10$$

したがって　$\dfrac{2^2(2^n-1)}{2-1} - 2n = 2^2(2^n-1) - 10$

整理すると　$-2n = -10$　よって　$\boldsymbol{n = 5}$ ■

2 (1) $A = \beta - \alpha$

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx &= \int_\alpha^\beta (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\,dx \\ &= \int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}\,dx \\ &= \left[\,\frac{1}{3}(x-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\,\right]_\alpha^\beta \\ &= \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3 \\ &= -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \boldsymbol{-\frac{1}{6}A^3}\end{aligned}$$

(2) C_1, C_2 の方程式から

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}x^2-(x-1)^2 &= -\frac{1}{n}\{n(x-1)^2-x^2\} \\ &= -\frac{1}{n}\{(n-1)x^2-2nx+n\}\end{aligned}$$

2 次方程式 $(n-1)x^2-2nx+n=0$ の解を α, β とすると $(\alpha<\beta)$

$$\alpha = \frac{n-\sqrt{n}}{n-1},\quad \beta=\frac{n+\sqrt{n}}{n-1}\quad ゆえに\quad \beta-\alpha=\frac{2\sqrt{n}}{n-1}$$

$(n-1)x^2-2nx+n=(n-1)(x-\alpha)(x-\beta)$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}x^2-(x-1)^2 &= -\frac{1}{n}\{n(x-1)^2-x^2\} \\ &= -\frac{n-1}{n}(x-\alpha)(x-\beta)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}S_n &= \int_\alpha^\beta \left\{\frac{1}{n}x^2-(x-1)^2\right\}dx \\ &= -\frac{n-1}{n}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= \frac{n-1}{6n}(\beta-\alpha)^3 = \frac{n-1}{6n}\left(\frac{2\sqrt{n}}{n-1}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{n}}{3(n-1)^2}}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果を $\left|n\sqrt{n}\,S_n - \dfrac{4}{3}\right| < \dfrac{1}{3}$ に代入すると

$$\left|\frac{4n^2}{3(n-1)^2} - \frac{4}{3}\right| < \frac{1}{3}$$

$\dfrac{n}{n-1} > 1$ であるから　　$\dfrac{4n^2}{3(n-1)^2} - \dfrac{4}{3} < \dfrac{1}{3}$

$$\frac{n^2}{(n-1)^2} < \frac{5}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{n}{n-1} < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$n \geqq 2$ であるから　　$2n < \sqrt{5}(n-1)$

$$(\sqrt{5}-2)n > \sqrt{5} \quad \text{ゆえに} \quad n > 5 + 2\sqrt{5} = 5 + \sqrt{20}$$

上式を満たす最小の自然数 n は　　$n = 5 + 5 = \mathbf{10}$ ■

3 (1) 3 面が赤，3 面が黒く塗られているサイコロを P，2 面が赤，4 面が黒く塗られているサイコロを Q とし，P，Q の赤い面が出る確率をそれぞれ p, q とすると

$$p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

1 回の試行で赤い面がちょうど 1 回出る確率は

$$p(1-q) + (1-p)q = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2) 1 回目で終了する確率は　pq

2 回目で終了する確率は　$(1-pq)\cdot pq$

2 回以下の試行で終了する確率は，$pq = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ より

$$pq + (1-pq)pq = pq(2-pq) = \frac{1}{6}\left(2 - \frac{1}{6}\right) = \boldsymbol{\frac{11}{36}}$$

(3) 1 回の試行で得点が 0，1，2 である確率をそれぞれ α, β, γ とすると

$$\alpha = (1-p)(1-q) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \quad \gamma = pq = \frac{1}{6},$$
$$\beta = 1 - (\alpha + \gamma) = \frac{1}{2}$$

ゲームの得点が 0 点となる確率は　$\alpha^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{1}{27}}$

ゲームの得点が 1 点となる確率は

$$\alpha\alpha\beta + \alpha\beta\alpha + \beta\alpha\alpha = 3\alpha^2\beta = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

ゲームの得点が 2 点となる確率は

$$\begin{aligned}&\gamma + \alpha\gamma + \alpha\alpha\gamma + \alpha\beta\beta + \beta\alpha\beta + \beta\beta\alpha\\ =&\gamma(1 + \alpha + \alpha^2) + 3\alpha\beta^2\\ =&\frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) + 3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \boldsymbol{\frac{53}{108}}\end{aligned}$$

ゲームの得点が 3 点となる確率は

$$\begin{aligned}\beta\gamma + \alpha\beta\gamma + \beta\alpha\gamma + \beta\beta\beta &= \beta\gamma(1 + 2\alpha) + \beta^3\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\left(1 + 2\cdot\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{8} = \boldsymbol{\frac{19}{72}}\end{aligned}$$

ゲームの得点が 4 点となる確率は　$\beta\beta\gamma = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{24}}$ ■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $x = 3\cos^3\theta$，$y = 3\sin^3\theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta} = -9\cos^2\theta\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta} = 9\sin^2\theta\cos\theta \qquad (*)$$

したがって　$\left(\dfrac{dx}{d\theta},\ \dfrac{dy}{d\theta}\right) = 9\sin\theta\cos\theta(-\cos\theta,\ \sin\theta)$

$\vec{v} = (-\cos\theta,\ \sin\theta)$ とし，C 上の $\mathrm{P}(3\cos^3\theta,\ 3\sin^3\theta)$ における接線を ℓ とする．ℓ 上の $\mathrm{T}(x,\ y)$ について，$\vec{v}/\!/\overrightarrow{\mathrm{PT}}$ であるから

$$(x - 3\cos^3\theta)\sin\theta + (y - 3\sin^3\theta)\cos\theta = 0$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より，$\sin\theta \neq 0$，$\cos\theta \neq 0$ に注意して整理すると

$$x\sin\theta + y\cos\theta = 3\sin\theta\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad \ell : \frac{x}{3\cos\theta} + \frac{y}{3\sin\theta} = 1$$

よって　$\mathbf{Q(3\cos\boldsymbol{\theta},\ 0)}$，$\mathbf{R(0,\ 3\sin\boldsymbol{\theta})}$

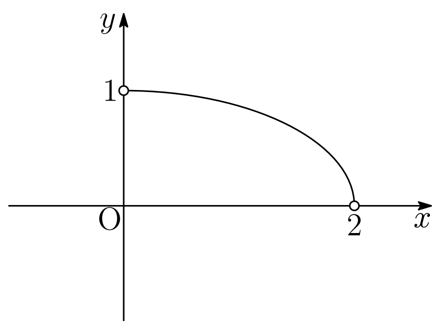
(2) 線分 QR を $1:2$ 内分する点 S は

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \frac{2\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}}{3} = (2\cos\theta,\ \sin\theta)$$

$x = 2\cos\theta$，$y = \sin\theta$ とすると $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad (x > 0,\ y > 0)$$

よって，点 S の軌跡は楕円 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ の第 1 象限の部分を表す．



(2) で求めた方程式から　$x^2 = 4(1 - y^2)$　$(0 \leqq y \leqq 1)$

よって，求める回転体の体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi} = 4\int_0^1 (1 - y^2)\,dy = 4\Big[\ y - \frac{y^3}{3}\ \Big]_0^1 = \frac{8}{3}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \frac{8}{3}\pi}$

(3)　$(*)$ から $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} &= 9\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)} \\ &= 9\sin\theta\cos\theta = \frac{9}{2}\sin 2\theta\end{aligned}$$

よって，求める曲線の部分の長さは

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{9}{2}\sin 2\theta\,d\theta \\ &= -\frac{9}{4}\Big[\ \cos 2\theta\ \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\frac{9}{8}}\end{aligned}$$

■

5 (1) $y=(x-1)^2+c-1$ より $(0 \leqq x \leqq 3)$，$x=3$ で最大値 1 をとるから

$$c+3=1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{c=-2}$$

(2) $a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$ とすると，正弦定理より

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

等式 $\dfrac{\sin A}{5}=\dfrac{\sin B}{7}=\dfrac{\sin C}{8}$ より　$a:b:c=5:7:8$

定数 k を用いて，$a=5k,\ b=7k,\ c=8k$ を余弦定理に代入すると

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{(8k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2{\cdot}8k{\cdot}5k}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(3) $x+\dfrac{1}{x}=1+\sqrt{2}$ より

$$\begin{aligned}x^2+\frac{1}{x^2}&=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\\&=(1+\sqrt{2})^2-2=\boldsymbol{1+2\sqrt{2}},\\x^3+\frac{1}{x^3}&=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)\\&=(1+\sqrt{2})\left\{(1+2\sqrt{2})-1\right\}\\&=(1+\sqrt{2}){\cdot}2\sqrt{2}=\boldsymbol{4+2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(4) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{3}$ より $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3} \quad \text{ゆえに} \quad \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\dfrac{\pi}{6} \leqq x+\dfrac{\pi}{6} < \dfrac{2}{3}\pi$ より　$x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$　よって　$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{6}}$

(5) $\log_{10}5=1-\log_{10}2=1-0.3010=0.6990$ より

$$\log_{10}5^{10}=10\log_{10}5=10\times 0.6990=6.990$$

$6<\log_{10}5^{10}<7$ であるから　$10^6<5^{10}<10^7$　よって 5^{10} は　**7 桁**　■