令和５年度　大分大学２次試験前期日程 (数学問題)
理工・経済・教育・医学部　令和５年２月25日

- 理工学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (100 分)
- 経済学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 教育学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部　$\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ 数 I・II・III・A・B (80 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 直角三角形 ABC において $\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{BC}=12$，$\mathrm{CA}=13$ とする．$\angle\mathrm{A}$ の二等分線と辺 BC の交点を D とする．

(1) 線分 AD の長さを求めなさい．

(2) $\angle\mathrm{A}$ の二等分線と $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の交点のうち，点 A と異なる点を E とする．線分 DE の長さを求めなさい．

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心を O とし，線分 BO と線分 AD の交点を P とする．AP : PD を求めなさい．

(4) $\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円の中心を I とする．AI : ID を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 等比数列 $\{a_n\}$ は $a_2=3$，$a_5=24$ を満たし，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ とする．また，数列 $\{b_n\}$ は，

$$\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{3}{2}b_n+S_n$$

を満たすとする．

(1) 一般項 a_n と S_n を n を用いてそれぞれ表しなさい．

(2) b_1 の値を求めなさい．

(3) b_{n+1} を b_n，n を用いて表しなさい．

(4) 一般項 b_n を n を用いて表しなさい．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $0 \leqq k \leqq 2$ とし，

$$S(k) = \int_k^{k+1} |x^2 - 2x|\, dx$$

とする．

(1) 関数 $y = |x^2 - 2x|$ のグラフを描きなさい．

(2) $0 \leqq k \leqq 1$ のとき，$S(k)$ を k を用いて表しなさい．

(3) $0 \leqq k \leqq 1$ のとき，$S(k)$ の最大値とそのときの k の値を求めなさい．

(4) $1 \leqq k \leqq 2$ のとき，$S(k)$ を k を用いて表しなさい．

(5) $1 \leqq k \leqq 2$ のとき，$S(k)$ が最小となる k の値を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 曲線 C を媒介変数 θ を用いて

$$\begin{cases} x = 3\cos\theta \\ y = \sin 2\theta \end{cases} \qquad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

と表す．

(1) 曲線 C 上の点で，y 座標の値が最大となる点の座標 $(x,\ y)$ を求めなさい．また，曲線 C 上の点で，y 座標の値が最小となる座標 $(x,\ y)$ をすべて求めなさい．

(2) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めなさい．

(3) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{5}}$ xyz-空間内の 2 点 $\mathrm{P}(-1,\ 1, -4)$ と $\mathrm{Q}(1,\ 2, -2)$ を通る直線 l と，原点 O を中心とする半径 r の球面 S_r が与えられている．以下の問に答えなさい．

(1) 球面 S_r と直線 l が 2 点で交わるための r の条件を求めなさい．

(2) 球面 S_r と直線 l が 2 点 A，B で交わるとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を r を用いて表しなさい．

(3) (2) のとき，三角形 OAB の面積を r を用いて表しなさい．

$\boxed{\mathbf{6}}$ n を自然数とする．5 個の赤玉と n 個の白玉が入った袋がある．袋から玉を取り出し，取り出した玉は袋に戻さない．袋から 1 個ずつ玉を取り出していくとき，6 回目が赤玉で袋の中の赤玉がなくなる確率を $p(n)$ とする．以下の問に答えなさい．

(1) $p(n)$ を二項係数を用いて表しなさい．

(2) $p(n) = A\left(\dfrac{1}{{}_{n+4}\mathrm{C}_4} - \dfrac{1}{{}_{n+5}\mathrm{C}_4}\right)$ となる定数 A を求めなさい．

(3) $S_n = p(1) + p(2) + \cdots + p(n)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{7}}$ xyz-空間内の 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 1, -1)$ と $\mathrm{B}(-3,\ 1,\ 3)$ を結ぶ線分 AB を z 軸を中心に回転させてできる回転面を S とする．以下の問に答えなさい．

(1) S と yz-平面との交わりを y と z の方程式で表し，yz-平面に図示しなさい．

(2) 2 つの平面 $z = 3$ 及び $z = -1$ と S で囲まれる立体の体積を求めなさい．

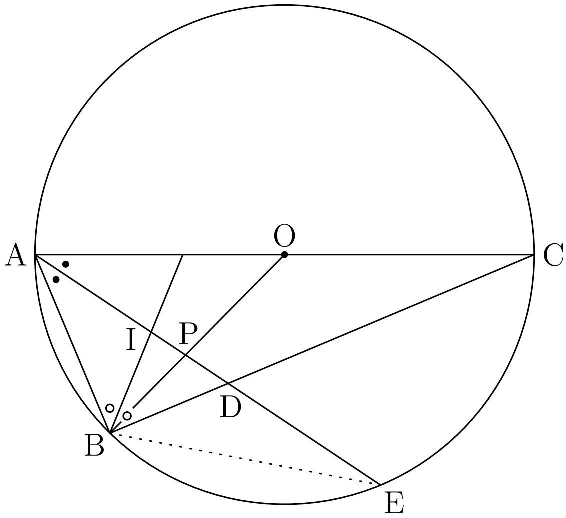
解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) ADは∠Aの二等分線であるから　BD : DC = AB : AC = 5 : 13

したがって　$\mathrm{BD} = \dfrac{5}{5+13}\mathrm{BC} = \dfrac{5}{18}\cdot 12 = \dfrac{10}{3}$

$\angle\mathrm{ABC} = 90^\circ$ であるから，三平方の定理により

$$\mathrm{AD} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BD}^2} = \sqrt{5^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{5}{3}\sqrt{13}}$$



別解 $\mathrm{AD}^2 = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} - \mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC} = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} - \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AB}+\mathrm{AC}}\mathrm{BC}\cdot\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}+\mathrm{AC}}\mathrm{BC}$

$$= \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\left\{1 - \left(\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}+\mathrm{AC}}\right)^2\right\}$$

$$= 5\cdot 13\left\{1 - \left(\frac{12}{5+13}\right)^2\right\} = \left(\frac{5}{3}\right)^2\cdot 13$$

補足 $\triangle\mathrm{ABE} \backsim \triangle\mathrm{ADC}$ より　AB : AE = AD : AC

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} = \mathrm{AD}\cdot\mathrm{AE} = \mathrm{AD}(\mathrm{AD}+\mathrm{DE}) = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{AD}\cdot\mathrm{DE}$$

方べきの定理により，$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DE} = \mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}$ であるから

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC} \quad \text{よって} \quad \mathrm{AD}^2 = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} - \mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}$$

(2) 方べきの定理により，AD·DE = BD·DC であるから

$$\frac{5\sqrt{13}}{3}\mathrm{DE} = \frac{10}{3}\left(12 - \frac{10}{3}\right) \quad \text{よって} \quad \mathbf{DE = \frac{4\sqrt{13}}{3}}$$

(3) △ADC と直線 BO について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{OA}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{5}{18}\cdot\frac{1}{1} = 1$$

よって　　$\mathbf{AP : PD = 18 : 5}$

(4) BI は ∠B の二等分線であるから

$$\mathrm{AI} : \mathrm{ID} = \mathrm{BA} : \mathrm{BD} = 5 : \frac{10}{3} = \mathbf{3 : 2}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 等比数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公比を r とすると

$$a_2 = ar = 3, \quad a_5 = ar^4 = 24 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{3}{2},\ r = 2$$

よって $$\boldsymbol{a_n = \frac{3}{2}\cdot 2^{n-1}}, \quad S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \boldsymbol{\frac{3}{2}(2^n - 1)}$$

(2) (∗) $$\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{3}{2}b_n + S_n$$

(∗) に $n = 1$ を代入すると，$S_1 = a_1 = \dfrac{3}{2}$ より

$$b_1 = \frac{3}{2}b_1 + \frac{3}{2} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{b_1 = -3}$$

(3) (∗) より $$\sum_{k=1}^{n+1} b_k = \frac{3}{2}b_{n+1} + S_{n+1}$$

これと (∗) の辺々の差をとると，$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} = \dfrac{3}{2}\cdot 2^n$ に注意して

$$b_{n+1} = \frac{3}{2}(b_{n+1} - b_n) + \frac{3}{2}\cdot 2^n \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b_{n+1} = 3b_n - 3\cdot 2^n}$$

(4) (3) の結果から $$\frac{b_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{b_n}{3^n} = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$n > 1$ のとき $$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{b_{k+1}}{3^{k+1}} - \frac{b_k}{3^k}\right) = -\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

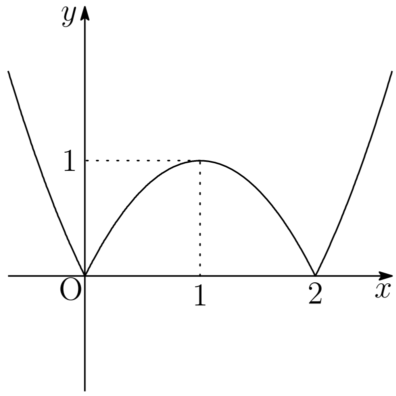
$$\frac{b_n}{3^n} - \frac{b_1}{3} = -2\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

上式は，$n = 1$ のときも成立し，これに $b_1 = -3$ を代入すると

$$\frac{b_n}{3^n} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3 \qquad \text{よって} \qquad b_n = 3(2^n - 3^n)$$

■

3 (1) $y=|x^2-2x|=\begin{cases} x^2-2x & (x \leqq 0,\ 2 \leqq x) \\ -x^2+2x & (0 \leqq x \leqq 2) \end{cases}$



(2) $0 \leqq k \leqq 1$ のとき，(1) のグラフから

$$S(k)=\int_k^{k+1}|x^2-2x|\,dx=\int_k^{k+1}(-x^2+2x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_k^{k+1}=\boldsymbol{-k^2+k+\frac{2}{3}}$$

(3) (2) の結果から，$0 \leqq k \leqq 1$ のとき　$S(k)=-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{12}$

よって，$S(k)$ は，$\boldsymbol{k=\frac{1}{2}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\frac{11}{12}}$ をとる．

(4) $1 \leqq k \leqq 2$ のとき，(1) のグラフから

$$S(k)=\int_k^{k+1}|x^2-2x|\,dx=\int_k^{2}(-x^2+2x)\,dx+\int_2^{k+1}(x^2-2x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_k^{2}+\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^{k+1}=\boldsymbol{\frac{2}{3}k^3-k^2-k+2}$$

(5) (4) の結果から　$S'(k)=2k^2-2k-1$

k	1	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	2
$S'(k)$		$-$	0	$+$	
$S(k)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$	

よって，求める k の値は　　$\boldsymbol{k=\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$　■

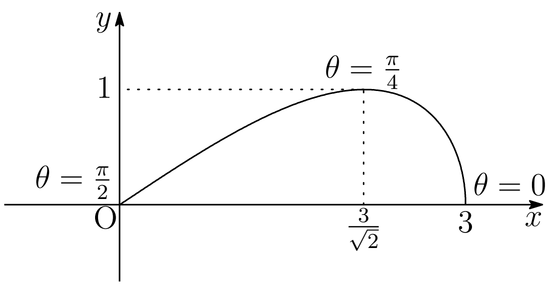
4 (1) C 上の点 $(x,\ y)$ が

$$x = 3\cos\theta, \quad y = \sin 2\theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

で与えられるから　$0 \leqq y \leqq 1$

y が最大となるとき　$\theta = \dfrac{\pi}{4}$　すなわち　$\left(\boldsymbol{\dfrac{3}{\sqrt{2}},\ 1}\right)$

y が最小となるとき　$\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{(3,\ 0),\ (0,\ 0)}$



(2) $x = f(\theta) = 3\cos\theta$ とおくと，$\dfrac{dx}{d\theta} = f'(\theta) = -3\sin\theta$

$$S = \int_{f(\frac{\pi}{2})}^{f(0)} y\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin 2\theta\,(-3\sin\theta)\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta = 2\Big[\ \sin^3\theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{2}$$

(3) 求める回転体の体積 V は

$$V = \pi\int_{f(\frac{\pi}{2})}^{f(0)} y^2\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 2\theta\,(-3\sin\theta)\,d\theta$$
$$= 12\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos^2\theta\,d\theta$$
$$= 12\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta - \cos^4\theta)\sin\theta\,d\theta$$
$$= 12\pi\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta + \frac{1}{5}\cos^5\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{8}{5}\pi}$$

■

$\boxed{5}$ (1) P$(-1,\ 1, -4)$，Q$(1,\ 2, -2)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (2,\ 1,\ 2)$

したがって，直線 l の方程式は

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{2} = t \qquad (t \text{ は媒介変数}) \qquad (*)$$

原点を通り，直線 l に垂直な平面 S の方程式は

$$S : 2x + y + 2z = 0$$

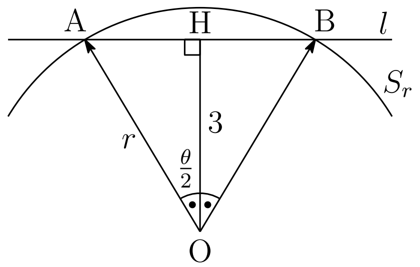
$(*)$ より　$x = 2t - 1,\ y = t + 1,\ z = 2t - 4$

これらを S の方程式に代入すると

$$2(2t-1) + t + 1 + 2(2t-4) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = 1$$

したがって，S と直線 l の交点を H とすると　H$(1,\ 2, -2)$

よって，r の条件は，$r >$ OH より　$\boldsymbol{r > 3}$



(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{3}{r} \quad \text{ゆえに} \quad \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = \frac{18}{r^2} - 1$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta = r \cdot r\left(\frac{18}{r^2} - 1\right) = \boldsymbol{18 - r^2}$

(3) $\mathrm{AB} = 2\mathrm{AH} = 2\sqrt{r^2 - 3^2} = 2\sqrt{r^2 - 9}$

よって　$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{OH} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{r^2-9}\cdot 3 = \boldsymbol{3\sqrt{r^2 - 9}}$　■

$\boxed{6}$ (1) 5個の赤玉と n 個の白玉を一列に並べ，1番目から6番目をそれぞれ1回目から6回目に取り出した玉と考えると，6番目が赤玉，7番目から $n+5$ 番目はすべて白玉で，1番目から5番目までに赤玉4個と白玉1個が並ぶ．よって，求める確率 $p(n)$ は

$$p(n) = \frac{{}_5\mathrm{C}_1}{{}_{n+5}\mathrm{C}_5} = \boldsymbol{\frac{5}{{}_{n+5}\mathrm{C}_5}}$$

(2) 次式を計算すると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{{}_{n+4}\mathrm{C}_4} - \frac{1}{{}_{n+5}\mathrm{C}_4} &= \frac{4!}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} \\
&\qquad - \frac{4!}{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)} \\
&= \frac{4!}{(n+4)(n+3)(n+2)}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+5}\right) \\
&= \frac{4!}{(n+4)(n+3)(n+2)} \times \frac{4}{(n+1)(n+5)} \\
&= \frac{4}{25} \times \frac{5\cdot 5!}{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{4}{25} \times \frac{5}{{}_{n+5}\mathrm{C}_5} = \frac{4}{25}p(n)
\end{aligned}$$

したがって　$p(n) = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{{}_{n+4}\mathrm{C}_4} - \dfrac{1}{{}_{n+5}\mathrm{C}_4}\right)$

よって　$\boldsymbol{A = \dfrac{25}{4}}$

(3) (2) の結果を利用すると

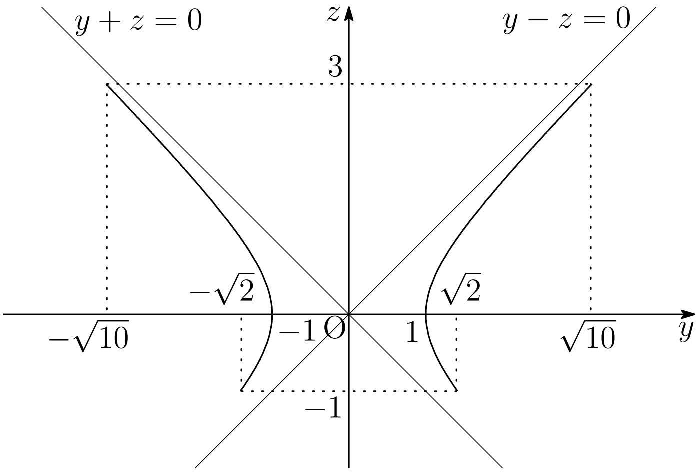
$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=1}^{n} p(k) &= \frac{25}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{{}_{k+4}\mathrm{C}_4} - \frac{1}{{}_{k+5}\mathrm{C}_4}\right) \\
&= \frac{25}{4}\left(\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_4} - \frac{1}{{}_{n+5}\mathrm{C}_4}\right)
\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{25}{4}\cdot\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_4} = \boldsymbol{\frac{5}{4}}$ ■

$\boxed{7}$ (1) A$(1,\ 1, -1)$，B$(-3,\ 1,\ 3)$ より $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 4(-1,\ 0,\ 1)$
直線 AB の方程式は

$$x = 1 - t, \quad y = 1, \quad z = -1 + t \qquad (t \text{ は媒介変数})$$

S の方程式は $x^2 + y^2 = (1-t)^2 + 1^2, \quad z = -1 + t$
ゆえに $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ すなわち $S : x^2 + y^2 - z^2 = 1$
これに $x = 0$ を代入すると $y^2 - z^2 = 1$
よって，S の yz-平面との交わりは，次のようになる．



補足 S は一葉双曲面 (線織面) である．神戸のポートタワーは一葉双曲面で真っ直ぐな鉄筋の柱で支えられていることで有名である．

(2) S の方程式から，求めるから回転体の体積 V は

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_{-1}^{3} (x^2 + y^2)\, dz = \int_{-1}^{3} (z^2 + 1)\, dz \\ &= \left[\ \frac{z^3}{3} + z\ \right]_{-1}^{3} = \frac{40}{3}\end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{V = \dfrac{40}{3}\pi}$ ■