令和４年度　大分大学２次試験前期日程 (数学問題)
理工・経済・教育・医学部　令和４年２月２５日

- 理工学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (100 分)
- 経済学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 教育学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部　$\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ 数 I・II・III・A・B (80 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 四面体 OABC は

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \sqrt{29},\quad |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = \sqrt{11},\quad |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 2\sqrt{2},\quad |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \sqrt{26},\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 8$$

を満たす．t を実数とし，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

とする．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ をそれぞれ求めなさい．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の最小値とそのときの実数 t の値を求めなさい．

(3) (2) の点 P に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ をそれぞれ示しなさい．

(4) 四面体 OABC の体積を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 1 と書かれたカード，2 と書かれたカードが 1 枚ずつ 1 つの袋に入っている．この袋から 1 枚のカードを取り出し，1 つのサイコロを 2 回投げる．取り出したカードに書かれた数を a，1 回目サイコロの出た目の数を b，2 回目のサイコロの出た目の数を c とする．

(1) 2 次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつ確率を求めなさい．

(2) 2 次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$ が異なる 2 つの整数の解をもつ確率を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $a,\ b$ を 0 でない定数とし，

$$f(x) = (x+a)(x-3a), \quad g(x) = b(x-3a)$$

とする．3 次関数 $F(x)$ は $F(0) = 0$ と $F'(x) = f(x)$ を満たし，2 次関数 $G(x)$ は，$G'(x) = g(x)$ を満たす．ただし，放物線 $y = G(x)$ の頂点 $(x_0,\ y_0)$ に対して，関数 $F(x)$ は $x = x_0$ で極値 y_0 をとるものとする．

(1) 関数 $F(x)$ を求めなさい．

(2) 関数 $G(x)$ を求めなさい．

(3) 2 つの曲線 $y = F(x)$ と $y = G(x)$ の共有点が 1 個となるとき，b を a を用いて表しなさい．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 自然数 k に対して

$$a_k = \lim_{n\to\infty} \left| \sin \frac{(k^2+1)\pi}{4} \right|^n$$

とする．また自然数 m に対して

$$b_m = \sum_{k=1}^{m} a_k$$

とする．

(1) $a_1,\ a_2$ を求めなさい．

(2) $a_k = 0$ となる k と $a_k = 1$ となる k をそれぞれ求めなさい．

(3) $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{b_{2m+1}}{m}$ を求めなさい．

5 関数 $f(x)=\log\dfrac{e^x}{x}$ を用いて，$a_1=2$，$a_{n+1}=f(a_n)$ によって数列 $\{a_n\}$ が与えらえている．ただし，対数は自然対数である．以下の問に答えなさい．

(1) $1\leqq x\leqq 2$ のとき，$0\leqq f(x)-1\leqq\dfrac{1}{2}(x-1)$ が成立することを示しなさい．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めなさい．

(3) $b_1=a_1$，$b_{n+1}=a_{n+1}b_n$ によって与えられる数列 $\{b_n\}$ の極限を求めなさい．

6 $a>0,\ b>0,\ a\neq b$ とする．また，2 つの楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ の第 1 象限における交点を通り，y 軸に平行な直線の方程式を $x=c$ とする．領域 $D_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1$，$0\leqq x\leqq c$，$0\leqq y$ の面積を S_1，領域 $D_2:\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}\leqq 1$，$0\leqq x\leqq c$，$0\leqq y$ の面積を S_2 とする．以下の問に答えなさい．

(1) c を $a,\ b$ を用いて表しなさい．

(2) S_1+S_2 を $a,\ b$ を用いて表しなさい．

7 正四面体 ABCD の頂点 A から出発して，辺を伝って歩き始める．最初の頂点 A では，その頂点につながる 3 本の辺のうち 1 本を確率 $\dfrac{1}{3}$ で選んで次の頂点に向かって歩く．また，どれかの頂点に達したときに，その頂点につながる 3 本の辺のうち 1 本を確率 $\dfrac{1}{3}$ で選んで次の頂点に向かって歩く．n を自然数，Q を頂点 A，B，C，D のどれかとするとき，$P_n(\mathrm{Q})$ で，n 本の辺を伝ったあと頂点 Q に達する確率を表す．以下の問に答えなさい．

(1) $P_1(\mathrm{A})$，$P_1(\mathrm{B})$，$P_1(\mathrm{C})$，$P_1(\mathrm{D})$ を求めなさい．

(2) $P_2(\mathrm{A})$，$P_2(\mathrm{B})$ を求めなさい．

(3) 数列 $\{P_n(\mathrm{A})\}$ の一般項を求め，その極限を求めなさい．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2)=\frac{1}{2}(29+29-8)=\mathbf{25}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=8+26-2\cdot8=18$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2)=\frac{1}{2}(29+11-18)=\mathbf{11},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2)=\frac{1}{2}(11+29-26)=\mathbf{7}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

(1) の結果を用いると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=11-7=4\end{aligned}$$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=t^2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$

$$=8t^2+8t+11=8\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+9$$

よって　$\boldsymbol{t=-\frac{1}{2}}$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ は最小値 **3** をとる．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{1}{2}\cdot8+4=0$$

ここで　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=11-7=4$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\frac{1}{2}\cdot8+4=0$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(4) $\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{8\cdot26-8^2}=6$

P は平面 ABC 上の点で $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は平面 ABC に垂直であるから，求める体積は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\frac{1}{3}\cdot6\cdot3=\mathbf{6}$$

■

2 (1) 2次方程式 $ax^2-bx+c=0$ が異なる2つの実数解をもつとき　$b^2-4ac>0$

(i) $a=1$ のとき，$c<\dfrac{b^2}{4}$ より，次の17通り．

$b \leqq 2$ のとき　c はなし

$b=3$ のとき　$c=1,\ 2$

$b=4$ のとき　$c=1,\ 2,\ 3$

$b=5,\ 6$ のとき　$c=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

(ii) $a=2$ のとき，$c<\dfrac{b^2}{8}$ より，次の9通り

$b \leqq 2$ のとき　c はなし

$b=3,\ 4$ のとき　$c=1$

$b=5$ のとき　$c=1,\ 2,\ 3$

$b=6$ のとき　$c=1,\ 2,\ 3,\ 4$

よって，求める確率は　$\dfrac{17+9}{2\cdot 6^2}=\mathbf{\dfrac{13}{36}}$

(2) 異なる2つの整数の解をもつとき，因数分解に着目する．

(i) $a=1$ のとき，$x^2-bx+c=0$ より

$c=1$ のとき　b はなし　　$c=4$ のとき　$b=5$
$c=2$ のとき　$b=3$　　$c=5$ のとき　$b=6$
$c=3$ のとき　$b=4$　　$c=6$ のとき　$b=5$

(ii) $a=2$ のとき，2つの整数解を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=\frac{b}{2},\quad \alpha\beta=\frac{c}{2}\quad \text{ゆえに}\quad b=2(\alpha+\beta),\ c=2\alpha\beta$$

$b,\ c$ はともに偶数であるから，$b'=\dfrac{b}{2},\ c'=\dfrac{c}{2}$ として

$$x^2-b'x+c'=0\quad (b',c'=1,2,3)$$

この方程式が異なる整数を解にもつ $b',\ c'$ を求めればよい．

$c'=1$ のとき　b' はなし
$c'=2$ のとき　$b'=3$
$c'=3$ のとき　b' はなし

(i)，(ii) より，求める確率は　$\dfrac{5+1}{2\cdot 6^2}=\mathbf{\dfrac{1}{12}}$　■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $F'(x)=(x+a)(x-3a)=x^2-2ax-3a^2$，$F(0)=0$ より

$$F(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2-3a^2x$$

(2) $G'(x)=b(x-3a)$，放物線 $y=G(x)$ の頂点が $(x_0,\ y_0)$ より

$$G(x)=\frac{b}{2}(x-3a)^2+y_0,\quad x_0=3a$$

$y_0=F(3a)$ であるから

$$y_0=\frac{1}{3}(3a)^3-a(3a)^2-3a^2\cdot 3a=-9a^3$$

よって　$\boldsymbol{G(x)=\frac{b}{2}(x-3a)^2-9a^3}$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned}F(x)-G(x)&=\frac{1}{3}x^3-ax^2-3a^2x-\left\{\frac{b}{2}(x-3a)^2-9a^3\right\}\\&=\frac{1}{3}x^3-\left(a+\frac{b}{2}\right)x^2-(3a^2-3ab)x+9a^3-\frac{9}{2}a^2b\\&=\frac{1}{3}(x-3a)^2\left(x+3a-\frac{3}{2}b\right)\end{aligned}$$

$F(x)-G(x)=0$ の解が 1 個であるから　$3a=-3a+\frac{3}{2}b$　よって　$\boldsymbol{b=4a}$

別解　$x_0=3a$，$F(3a)=y_0$ に注目すると

$$\begin{aligned}F'(x)&=(x+a)(x-3a)=\{(x-3a)+4a\}(x-3a)\\&=(x-3a)^2+4a(x-3a)\end{aligned}$$

したがって　$F(x)=\frac{1}{3}(x-3a)^3+2a(x-3a)^2+y_0$

これと $G(x)=\frac{b}{2}(x-3a)^2+y_0$ について，$F(x)=G(x)$ とすると

$$\frac{1}{3}(x-3a)^3+2a(x-3a)^2+y_0=\frac{b}{2}(x-3a)^2+y_0$$

$$(x-3a)^2\left\{(x-3a)+6a-\frac{3b}{2}\right\}=0$$

$$(x-3a)^2\left(x+3a-\frac{3b}{2}\right)=0$$

解が 1 個であるから　$3a=-3a+\frac{3b}{2}$　よって　$\boldsymbol{b=4a}$　■

$\boxed{4}$ (1) $a_k = \lim_{n\to\infty} \left|\sin \dfrac{(k^2+1)\pi}{4}\right|^n$ より

$$a_1 = \lim_{n\to\infty} \left|\sin \frac{(1^2+1)\pi}{4}\right|^n = \lim_{n\to\infty} \left|\sin \frac{\pi}{2}\right|^n = \mathbf{1},$$
$$a_2 = \lim_{n\to\infty} \left|\sin \frac{(2^2+1)\pi}{4}\right|^n = \lim_{n\to\infty} \left|\sin \frac{5\pi}{4}\right|^n = \mathbf{0}$$

(2) j を自然数とする．

$$a_{2j-1} = \lim_{n\to\infty} \left|\sin \frac{(2j-1)^2+1}{4}\pi\right|^n = \lim_{n\to\infty} \left|\sin \left(j^2 - j + \frac{1}{2}\right)\pi\right|^n = 1,$$
$$a_{2j} = \lim_{n\to\infty} \left|\sin \frac{(2j)^2+1}{4}\pi\right|^n = \lim_{n\to\infty} \left|\sin \left(j^2 + \frac{1}{4}\right)\pi\right|^n = 0$$

よって，$a_k = 0$ となる k は**偶数**，$a_k = 1$ となる k は**奇数**．

(3) (2) の結果から　$b_{2m+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k = m+1$

よって　$\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{b_{2m+1}}{m} = \lim_{m\to\infty} \frac{m+1}{m} = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right) = \mathbf{1}$ ■

$\boxed{5}$ (1) $f(x) = \log \dfrac{e^x}{x} = x - \log x$ より　$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$, $f''(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$1 \leqq x \leqq 2$ のとき，$f(x)$, $f'(x)$ は単調増加である．平均値の定理により

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(c) \quad (1 < c < x)$$

を満たす c が存在する．$f(1) = 1$ および $f'(c) \leqq f'(2) = \dfrac{1}{2}$ より

$$\frac{f(x) - 1}{x - 1} \leqq \frac{1}{2} \tag{A}$$

$f(1) = 1$ で，$1 \leqq x \leqq 2$ において，$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(1) \leqq f(x) \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq f(x) - 1 \tag{B}$$

(A)，(B) より，$1 \leqq x \leqq 2$ のとき，次式が成立する．

$$0 \leqq f(x) - 1 \leqq \frac{1}{2}(x - 1) \tag{$*$}$$

(2) すべての自然数 n について，次が成立することを数学的帰納法で示す．

$$1 < a_{n+1} < a_n \tag{$**$}$$

［1］ $n = 1$ のとき，$a_1 = 2$，$a_2 = 2 - \log 2$

$$1 < 1 + (1 - \log 2) = a_2 < 2 \quad \text{ゆえに} \quad 1 < a_2 < a_1$$

よって，$n = 1$ のとき，$(**)$ は成立する．

［2］ $n = k$ のとき，$(**)$ が成立する，すなわち，$1 < a_{k+1} < a_k$ であると仮定すると，$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(1) < f(a_{k+1}) < f(a_k) \quad \text{ゆえに} \quad 1 < a_{k+2} < a_{k+1}$$

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$(**)$ が成立する．（証終）

$(**)$ より，すべての自然数 n について $1 < a_n \leqq 2$ が成立するから，これを $(*)$ に適用すると

$$0 \leqq a_{n+1} - 1 \leqq \frac{1}{2}(a_n - 1) \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq a_n - 1 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - 1) = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 1}$$

別解 すべての自然数 n について，次が成立することを数学的帰納法で示す．

$$1 \leqq a_n \leqq 2 \qquad (\#)$$

［1］$n=1$ のとき，$a_1=2$ より，明らかに $(\#)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(\#)$ が成立する，すなわち，$1 \leqq a_k \leqq 2$ であると仮定すると，$(*)$ から

$$0 \leqq a_{k+1}-1 \leqq \frac{1}{2}(a_k-1) \leqq \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 1 \leqq a_{k+1} \leqq \frac{3}{2} \leqq 2$$

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$(\#)$ が成立する．　(証終)

再度，$(\#)$ を $(*)$ に適用すると

$$0 \leqq a_{n+1}-1 \leqq \frac{1}{2}(a_n-1) \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leqq a_n-1 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = 1}$$

(3) 漸化式より $\displaystyle\frac{b_{n+1}}{b_n}=a_{n+1}$ ゆえに $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\frac{b_{k+1}}{b_k}=\prod_{k=1}^{n-1}a_{k+1} \quad (n \geqq 2)$

$$\frac{b_n}{b_1}=\prod_{k=1}^{n-1}a_{k+1} \quad b_1=a_1\text{より} \quad b_n=\prod_{k=1}^{n}a_k \qquad (***)$$

漸化式より $a_{n+1}=f(a_n)=a_n-\log a_n$

$$\log a_n = a_n-a_{n+1} \quad \text{ゆえに} \quad a_n=e^{a_n-a_{n+1}}$$

したがって

$$\prod_{k=1}^{n}a_k=\prod_{k=1}^{n}e^{a_k-a_{k+1}}=e^{2-a_{n+1}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$ であるから，上式および $(***)$ から

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}a_k=e^{2-1}=\boldsymbol{e}$$

■

6 (1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ より

$$\frac{b^2x^2}{a^2}+y^2=b^2,\quad \frac{a^2x^2}{b^2}+y^2=a^2 \tag{$*$}$$

上の 2 式の辺々の差をとると $\left(\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{a^2}{b^2}\right)x^2=b^2-a^2$

$$\frac{(b^2-a^2)(b^2+a^2)}{a^2b^2}x^2=b^2-a^2$$

$b^2-a^2\neq 0$ であるから　$x^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$　これを $(*)$ の第 1 式に代入すると

$$\frac{b^4}{a^2+b^2}+y^2=b^2 \quad \text{ゆえに}\quad y^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

第 1 象限における交点 $\left(\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ から　$\boldsymbol{c=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

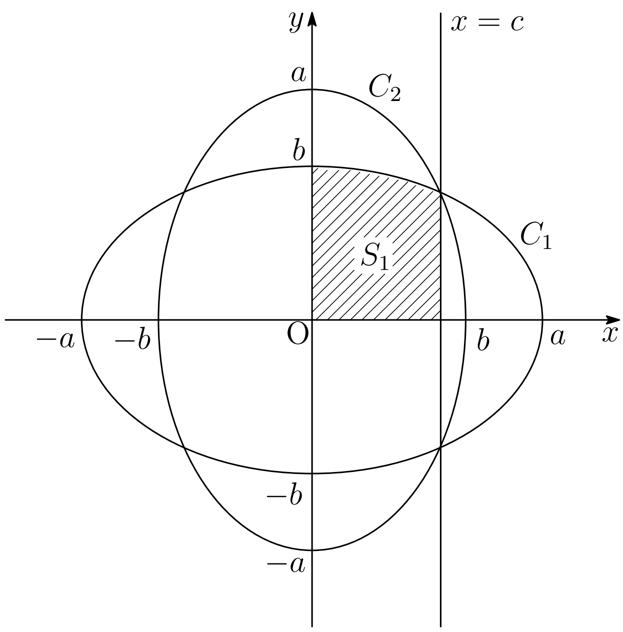
(2) 2 つの楕円を

$$C_1(\theta)=(a\cos\theta,\ b\sin\theta),\quad C_2(\theta)=(b\cos\theta,\ a\sin\theta)$$

とおく．(1) で求めた交点 $(c,\ c)$ が，$C_1(\alpha)$ および $C_2(\beta)$ であるとき

$$c=a\cos\alpha=b\sin\alpha=b\cos\beta=a\sin\beta \quad \left(0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}\right)$$

ゆえに　$\sin\alpha=\cos\beta,\quad \cos\alpha=\sin\beta$　すなわち　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$　$\cdots$①



したがって

$$S_1 = \int_{a\cos\frac{\pi}{2}}^{a\cos\alpha} y\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} b\sin\theta(-a\sin\theta)\,d\theta = ab\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}ab\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}ab\Big[\,\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\,\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + \frac{1}{4}ab\sin 2\alpha$$

ここで　$\dfrac{1}{4}ab\sin 2\alpha = \dfrac{1}{2}ab\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{1}{2}(a\cos\alpha)(b\sin\alpha) = \dfrac{1}{2}c^2$

$$S_1 = \frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + \frac{1}{2}c^2$$

同様にして

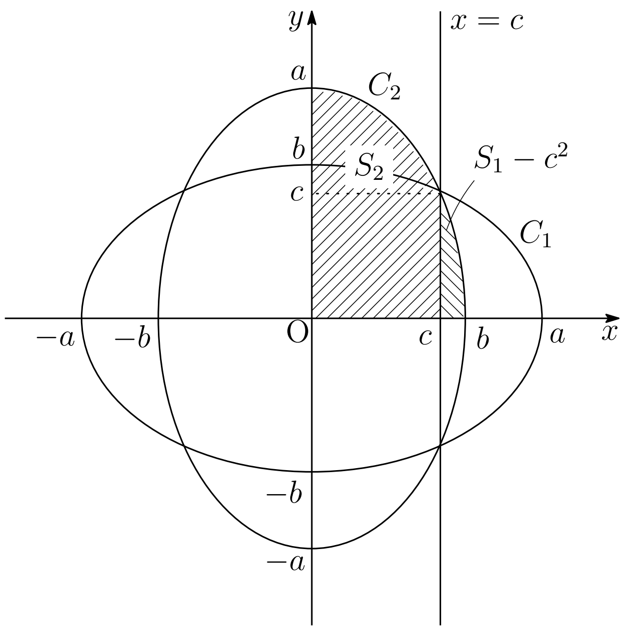
$$S_2 = \frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) + \frac{1}{2}c^2$$

① および (1) の結果により

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2}ab\{\pi - (\alpha+\beta)\} + c^2 = \boldsymbol{\frac{\pi ab}{4} + \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$$

補足 C_1 と C_2 は直線 $y = x$ に関して対称であるから，前頁の S_1 から下の図の面積 $S_1 - c^2$ と S_2 の面積の和を利用すると

$$(S_1 - c^2) + S_2 = \frac{\pi ab}{4} \quad ゆえに \quad S_1 + S_2 = \frac{\pi ab}{4} + c^2$$



別解 原点Oと交点 $(c,\ c)$ を結ぶ線分と y 軸および C_1 で囲まれた部分の面積を T_1 とすると，ガウス・グリーンの定理[1]により

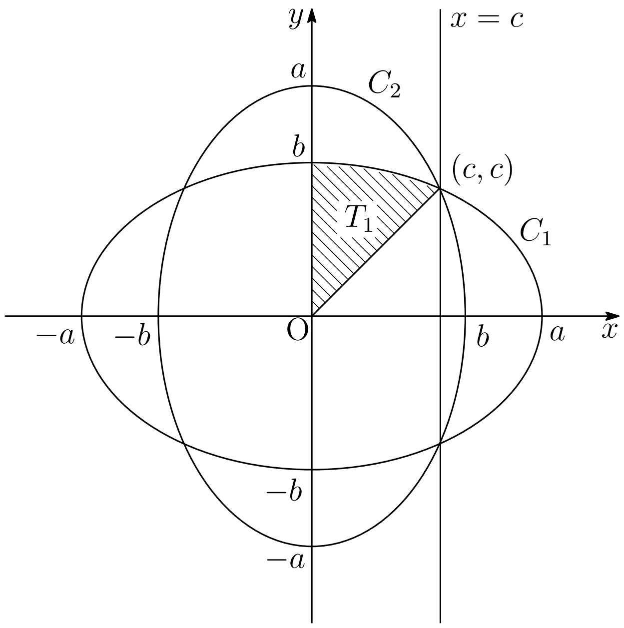
$$
\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \{a\cos\theta(b\sin\theta)' - (a\cos\theta)'b\sin\theta\}d\theta \\
&= \frac{1}{2}ab\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)
\end{aligned}
$$

同様に，原点Oと交点 $(c,\ c)$ を結ぶ線分と y 軸および C_1 で囲まれた部分の面積を T_2 とすると

$$
\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{2}\int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} \{b\cos\theta(a\sin\theta)' - (b\cos\theta)'a\sin\theta\}d\theta \\
&= \frac{1}{2}ab\int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{2}ab\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)
\end{aligned}
$$

$S_1 = T_1 + \dfrac{1}{2}c^2$，$S_2 = T_2 + \dfrac{1}{2}c^2$ であるから，① および (1) の結果により

$$
S_1 + S_2 = \frac{1}{2}ab\{\pi - (\alpha+\beta)\} + c^2 = \boldsymbol{\frac{\pi ab}{4} + \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}
$$



■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2021.pdf (p.11 を参照).

$\boxed{7}$ (1) 条件から　$\boldsymbol{P_1(\mathrm{A}) = 0}$，$\boldsymbol{P_1(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{3}}$，$\boldsymbol{P_1(\mathrm{C}) = \dfrac{1}{3}}$，$\boldsymbol{P_1(\mathrm{D}) = \dfrac{1}{3}}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} P_2(\mathrm{A}) &= \frac{1}{3}\{P_1(\mathrm{B}) + P_1(\mathrm{C}) + P_1(\mathrm{D})\} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{3}}, \\ P_2(\mathrm{B}) &= \frac{1}{3}\{P_1(\mathrm{A}) + P_1(\mathrm{C}) + P_1(\mathrm{D})\} \\ &= \frac{1}{3}\left(0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{2}{9}} \end{aligned}$$

(3) $P_n(\mathrm{A}) + P_n(\mathrm{B}) + P_n(\mathrm{C}) + P_n(\mathrm{D}) = 1$ に注意して

$$\begin{aligned} P_{n+1}(\mathrm{A}) &= \frac{1}{3}\{P_n(\mathrm{B}) + P_n(\mathrm{C}) + P_n(\mathrm{D}) = 1\} \\ &= \frac{1}{3}\{1 - P_n(\mathrm{A})\} \end{aligned}$$

したがって　$P_{n+1}(\mathrm{A}) - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{3}\left\{P_n(A) - \dfrac{1}{4}\right\}$

$$P_n(\mathrm{A}) - \frac{1}{4} = \left\{P_1(\mathrm{A}) - \frac{1}{4}\right\}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$P_1(\mathrm{A}) = 0$ より　$\boldsymbol{P_n(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{4}\left\{1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}$

よって　　$\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} P_n(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{4}}$ ■