# 令和３年度　大分大学２次試験前期日程 (数学問題)
# 理工・経済・教育・医学部　令和 3 年 2 月 25 日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (100 分)
- 経済学部は，$\boxed{1}$ , $\boxed{2}$ , $\boxed{5}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 教育学部は，$\boxed{1}$ , $\boxed{2}$ , $\boxed{5}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部は，$\boxed{6}$ ～ $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B (80 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ $n$ を自然数とし，$a_n = \log_{10}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)$ とする．

(1) $a_1$，$a_2$ を $\log_{10} 2$ を用いて表しなさい．

(2) $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とおく．$10^{S_n}$ を $n$ を用いて表しなさい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $0 \leqq \alpha \leqq \theta \leqq \pi$ とし，

$$\cos\alpha = \frac{1}{4}, \quad x = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$$

とする．

(1) $\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$ の値を求めなさい．

(2) $x$ のとり得る値の範囲を求めなさい．

(3) 関数

$$y = 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta - \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta + 3$$

の最小値を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 三角形 OAB に対し，辺 OA を 3 : 2 に外分する点 C，辺 OB を 4 : 3 に外分する点を D，辺 AB の中点を M とおく．$s$, $t$ を実数とし，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とする．

(1) 等式 $3\overrightarrow{\mathrm{OP}} + 4\overrightarrow{\mathrm{CP}} + 5\overrightarrow{\mathrm{DP}} = \vec{0}$ が成り立つとき，$s$, $t$ の値を求めなさい．

(2) 点 P が直線 OM と直線 CD の交点であるとき，$s$, $t$ の値を求めなさい．

(3) 点 P が三角形 OCM の内部および周上を動くとき，点 $(s,\ t)$ の存在範囲を $st$ 平面上に図示しなさい．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 曲線 $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ が 2 点 $\mathrm{A}(\sqrt{6},\ 6k)$，$\mathrm{B}(3,\ 3\sqrt{2}k)$ を通る．ただし，$a > 0$，$b > 0$，$k > 0$ とする．

(1) $a$ の値を求め，$b$ を $k$ を用いて表しなさい．

(2) 原点 O と点 A を通る直線 $\ell_1$，曲線 $C$，および $x$ 軸で囲まれた図形の面積を $k$ を用いて表しなさい．

(3) 原点 O と点 B を通る直線 $\ell_2$，曲線 $C$，および $x$ 軸で囲まれた図形を，$x$ 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $k$ を用いて表しなさい．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 関数 $f(x)$ は等式

$$f(x) = x|x-1| - 3x^2 \int_0^2 f(t)\,dt$$

を満たす．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x|x-1|\,dx$ の値を求めなさい．

(2) $a = \displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt$ とする．$a$ の値を求めなさい．

(3) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = x$ で囲まれた図形の面積を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 以下の問いに答えよ．

(1) 座標平面上の点 $(x,\ y)$ を原点の周りに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転して得られる点の座標を $(x',\ y')$ とする．$x',\ y'$ を $x,\ y$ を用いて表しなさい．

(2) 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を原点の周りに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転して得られる図形の方程式を求めなさい．

(3) 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上に点 $\mathrm{A}(a,\ \sqrt{a^2-1})\ (a > 1)$ をとる．原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ と結んだ線分 OA と双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 及び $x$ 軸で囲まれた図形の面積 $S$ が

$$S = \frac{1}{2}\log(a + \sqrt{a^2-1})$$

と表されることを示しなさい．

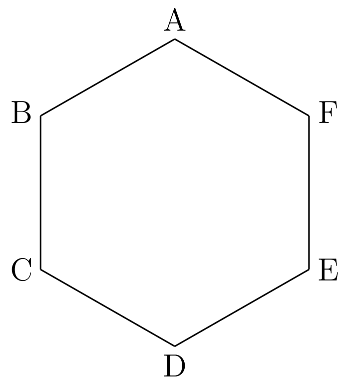
**7** △ABC において ∠CAB の二等分線に 2 つの頂点 B，C から垂線を引き，二等分線との交点をそれぞれ H, H′ とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とする．このとき以下の問いに答えなさい．

(1) ベクトル $\dfrac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}$ の大きさは 1 であることを示しなさい．

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BH}}+\overrightarrow{\mathrm{CH'}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表しなさい．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BH}}+\overrightarrow{\mathrm{CH'}}=\vec{0}$ であるとき，△ABC はどのような三角形になるか．その形状を答えなさい．

**8** 図のような正六角形 ABCDEF と動点 P があり，点 P は最初頂点 A の位置にある．サイコロを振って，1，2，3 の目が出れば時計回りに隣の頂点へ移動し，4，5 の目が出れば反時計回りに隣の頂点に移動する．そして，6 の目が出たときはその位置にとどまる．このとき以下の問いに答えなさい．




(1) サイコロを 3 回振った時点で点 P が頂点 D の位置にある確率を求めなさい．

(2) サイコロを 4 回振った時点で点 P が頂点 E の位置にある確率を求めなさい．

(3) サイコロを 6 回振った時点で点 P が頂点 A の位置にある確率を求めなさい．

# 解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $a_n = \log_{10}\left(1 + \dfrac{3}{n}\right)$ より

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \log_{10} 4 = \mathbf{2\log_{10} 2} \\
a_2 &= \log_{10}\frac{5}{2} = \log_{10}\frac{10}{4} = 1 - \log_{10} 4 = \mathbf{1 - 2\log_{10} 2}
\end{aligned}
$$

(2) $a_n = \log_{10}\dfrac{n+3}{n} = \log_{10}(n+3) - \log_{10} n$ より

(i) $n \geqq 3$ のとき

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\{\log_{10}(k+3) - \log_{10} k\} \\
&= \log_{10}(n+3) + \log_{10}(n+2) + \log_{10}(n+1) \\
&\qquad\qquad - \log_{10} 1 - \log_{10} 2 - \log_{10} 3 \\
&= \log_{10}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} \qquad \cdots(*)
\end{aligned}
$$

(ii) $n = 1,\ 2$ のとき，(1) の結果から

$$
\begin{aligned}
S_1 &= a_1 = \log_{10} 4 \\
S_2 &= a_1 + a_2 = \log_{10} 4 + (1 - \log_{10} 4) = 1
\end{aligned}
$$

このときも，$(*)$ は成立する．

すべての自然数 $n$ について $(*)$ は成立するから

$$
\mathbf{10^{S_n} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}}
$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$ $(0 \leqq \alpha \leqq \pi)$ より，$\sin\alpha \geqq 0$ であるから

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

よって　$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{3} + \cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{3}$

$$= \frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{8}}$$

(2) $x = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ より　$x = 2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$

$0 \leqq \alpha \leqq \theta \leqq \pi$ より　$\alpha + \dfrac{\pi}{3} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{4}{3}\pi$

ここで　$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{3} - \sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{3}$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-3\sqrt{5}}{8} < 0$$

ゆえに　$\dfrac{\pi}{2} < \alpha + \dfrac{\pi}{3} \leqq \theta + \dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{4}{3}\pi$

したがって　$2\sin\dfrac{4}{3}\pi \leqq 2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right) \leqq 2\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$

よって　$\boldsymbol{-\sqrt{3} \leqq x \leqq \dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}}$

(3) $x = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ の両辺を平方すると

$$x^2 = (\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)^2 = 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta + 1$$

したがって

$$\begin{aligned} y &= 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta - \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta + 3 \\ &= (2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta + 1) - (\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta) + 2 \\ &= x^2 - x + 2 \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \end{aligned}$$

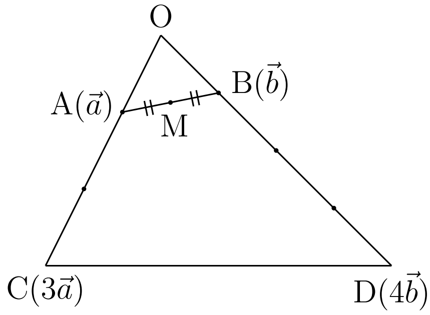
$-\sqrt{3} < \dfrac{1}{2} < \dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}$ より，求める $y$ の最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{7}{4}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $3\overrightarrow{\mathrm{OP}}+4\overrightarrow{\mathrm{CP}}+5\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\vec{0}$ より

$$3\overrightarrow{\mathrm{OP}}+4(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})+5(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}})=\vec{0}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ について解くと　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{5}{12}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくと




$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{a}+t\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}=3\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OD}}=4\vec{b}$

したがって　$s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{a}+\dfrac{5}{3}\vec{b}$

$\vec{a},\ \vec{b}$ は1次独立であるから

$$\boldsymbol{s=1,\ \ t=\frac{5}{3}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ は平行であるから　$s=t$　$\cdots$①

$\vec{a}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{b}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{s}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{t}{4}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

このとき，P は CD 上の点であるから　$\dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{4}=1$　$\cdots$②

①，② を解いて　$\boldsymbol{s=t=\dfrac{12}{7}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{MO}}=-\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$，$\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=3\vec{a}-\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{5}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}$

上の2式から　$\vec{a}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{MC}},\quad \vec{b}=-\dfrac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{MO}}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{MC}}$

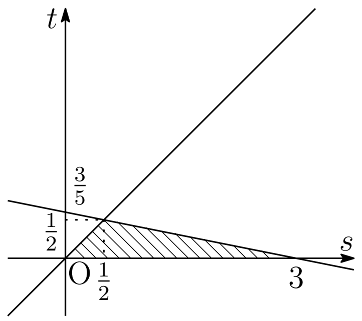
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{MP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=s\vec{a}+t\vec{b}-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})\\
&=\left(s-\frac{1}{2}\right)\vec{a}+\left(t-\frac{1}{2}\right)\vec{b}\\
&=\left(s-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right)+\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{MO}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right)\\
&=\left(-\frac{1}{3}s-\frac{5}{3}t+1\right)\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\left(\frac{1}{3}s-\frac{1}{3}t\right)\overrightarrow{\mathrm{MC}}
\end{aligned}$$

P が三角形 OCM の内部および周上を動くとき

$$-\frac{1}{3}s-\frac{5}{3}t+1\geqq 0,\quad \frac{1}{3}s-\frac{1}{3}t\geqq 0,$$
$$\left(-\frac{1}{3}s-\frac{5}{3}t+1\right)+\left(\frac{1}{3}s-\frac{1}{3}t\right)\leqq 1$$

それぞれ整理すると　$t \leqq -\dfrac{1}{5}s + \dfrac{3}{5},\quad t \leqq s,\quad t \geqq 0$

よって，点 $(s,\ t)$ の領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む．

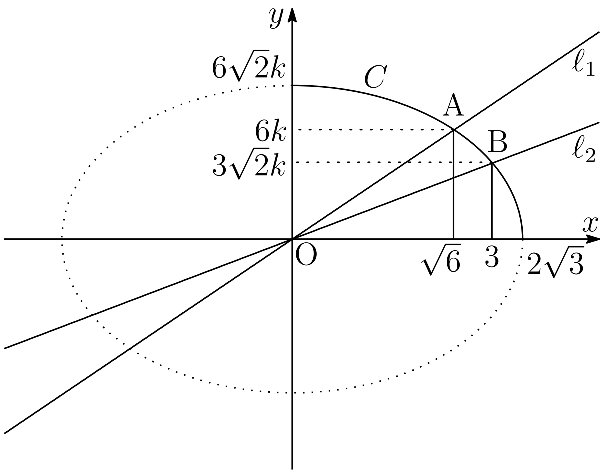



$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 2 点 $\mathrm{A}(\sqrt{6},\ 6k)$，$\mathrm{B}(3,\ 3\sqrt{2}k)$ は曲線 $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ 上の点であるから $(a > 0,\ b > 0,\ k > 0)$

$$\frac{6}{a^2} + \frac{36k^2}{b^2} = 1, \quad \frac{9}{a^2} + \frac{18k^2}{b^2} = 1$$

上の 2 式から　$a^2 = 12,\ b^2 = 72k^2$　よって　$\boldsymbol{a = 2\sqrt{3},\ b = 6\sqrt{2}k}$

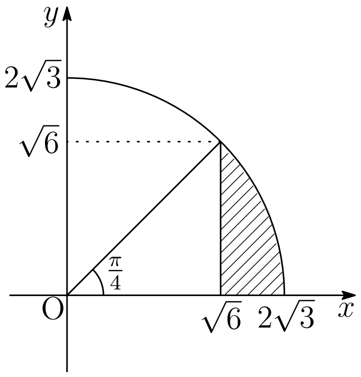
(2) (1) の結果から　$\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{72k^2} = 1$　ゆえに　$y = \sqrt{6}k\sqrt{12 - x^2}$




求める面積を $S$ とすると

$$S = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 6k + \sqrt{6}k\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{12 - x^2}\,dx$$

$\displaystyle\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{12-x^2}\,dx$ は右の図の斜線部分の面積に等しいから




$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{12-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}(2\sqrt{3})^2\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\sqrt{6})^2 \\ &= \frac{3}{2}\pi - 3\end{aligned}$$

よって，求める面積は

$$S = 3\sqrt{6}k + \sqrt{6}k\left(\frac{3}{2}\pi - 3\right) = \boldsymbol{\frac{3}{2}\sqrt{6}k\pi}$$

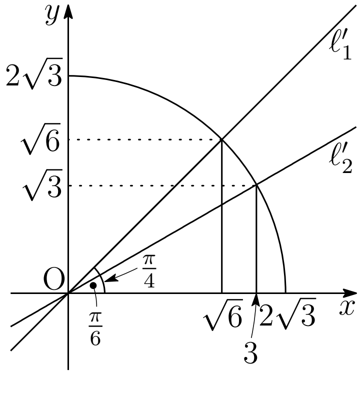
(3) 求める回転体の体積を $V$ とすると

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}\pi(3\sqrt{2}k)^2\cdot 3 + \pi\int_3^{2\sqrt{3}} (\sqrt{6}k\sqrt{12-x^2})^2\,dx \\ &= 18k^2\pi + 6k^2\pi\int_3^{2\sqrt{3}} (12-x^2)\,dx \\ &= 18k^2\pi + 6k^2\pi\Big[\,12x - \frac{x^3}{3}\,\Big]_3^{2\sqrt{3}} = \boldsymbol{48(2\sqrt{3}-3)k^2\pi}\end{aligned}$$

補足 $C$, $\ell_1$, $\ell_2$ を $x$ 軸を元に，$y$ 軸方向に $\dfrac{1}{\sqrt{6}k}$ 倍に拡大したものを，それぞれ $C'$, $\ell_1'$, $\ell_2'$ とすると

$$C' : x^2 + y^2 = 12\ (x \geqq 0,\ y \geqq 0) \quad \ell_1' : y = x, \quad \ell_2' : y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

$\ell_1'$, $\ell_2'$ の偏角はそれぞれ $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{6}$ である (これらの偏角がいわゆる有名角となるように作問されているため，本題の面積や回転体の体積を高校数学の範囲で求めることができる)．$\ell_1'$, $C'$ および $x$ 軸で囲まれた図形の面積を $S'$ とし，$\ell_2'$, $C'$ および $x$ で囲まれた図形を $x$ 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $V'$ とすると




$$S' = \frac{1}{2}(2\sqrt{3})^2\frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi$$

$$\begin{aligned}V' &= \frac{1}{3}\pi(\sqrt{3})^2\cdot 3 + \pi\int_3^{2\sqrt{3}} (12-x^2)\,dx \\ &= 8\pi(2\sqrt{3}-3)\end{aligned}$$

よって　$S = \sqrt{6}kS'$,　$V = (\sqrt{6}k)^2V'$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $0 \leqq x \leqq 1$ において，$|x-1| = 1-x$ であるから

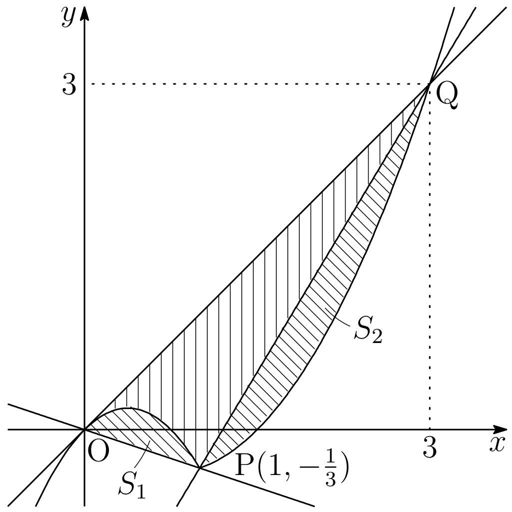
$$\int_0^1 x|x-1|\,dx = \int_0^1 x(1-x)\,dx = \frac{1}{6}(1-0)^3 = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

(2) $a = \int_0^2 f(t)\,dt$ より，$f(x) = x|x-1| - 3ax^2$ であるから

$$\begin{aligned} a &= \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 t|t-1|\,dt + \int_1^2 t|t-1|\,dt - \int_0^2 3at^2\,dt \\ &= \int_0^1 t(1-t)\,dt + \int_1^2 (t^2-t)\,dt - a\Big[\, t^3 \,\Big]_0^2 \\ &= \frac{1}{6} + \Big[\, \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \,\Big]_1^2 - 8a \\ &= 1 - 8a \end{aligned}$$

これを解いて　$\boldsymbol{a = \frac{1}{9}}$

(3) (2) の結果から




$$\begin{aligned} f(x) &= x|x-1| - \frac{1}{3}x^2 \\ &= \begin{cases} x - \dfrac{4}{3}x^2 & (0 \leqq x \leqq 1) \\ \dfrac{2}{3}x^2 - x & (x \leqq 0,\ 1 \leqq x) \end{cases} \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$y = f(x)$ と $y = x$ の共有点の $x$ 座標は

$$x - \frac{4}{3}x^2 = x \quad ゆえに \quad x = 0$$

$x \leqq 0,\ 1 \leqq x$ のとき，$y = f(x)$ と $y = x$ の共有点の $x$ 座標は

$$\frac{2}{3}x^2 - x = x \quad ゆえに \quad x = 0,\ 3$$

右の図のように，2 点 $\mathrm{P}\left(1, -\dfrac{1}{3}\right)$，$\mathrm{Q}(3,\ 3)$ をとり，曲線 $y = f(x)$ と直線 OP で囲まれた部分の面積を $S_1$ とし，曲線 $y = f(x)$ と直線 PQ で囲まれた部分の面積を $S_2$ とすると，求める図形の面積 $S$ は

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{OPQ} - S_1 + S_2 \\ &= \frac{1}{2}\left|1\cdot 3 - \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 3\right| - \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{3}(1-0)^3 + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}(3-1)^3 = \mathbf{\frac{8}{3}} \end{aligned}$$

**6** (1) 複素数平面上の点 $x+yi$ を原点Oを中心に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させた点を $x'+y'i$ とすると

$$\begin{aligned} x'+y'i &= (x+yi)\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x+yi)(1+i) = \frac{x-y}{\sqrt{2}}+\frac{x+y}{\sqrt{2}}i \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{x'=\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}}$，$\boldsymbol{y'=\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}}$

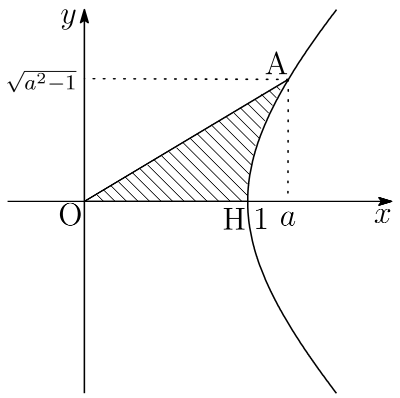
(2) (1) の結果から　$x'y'=\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}=\dfrac{x^2-y^2}{2}=\dfrac{1}{2}$　　よって　$\boldsymbol{xy=\dfrac{1}{2}}$

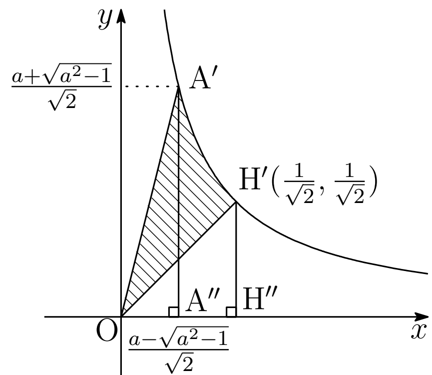
(3) $\mathrm{A}(a,\ \sqrt{a^2-1})$，$\mathrm{H}(1,\ 0)$ とし，これらを原点を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した点をそれぞれ $\mathrm{A}'$, $\mathrm{H}'$ とすると，(1) の結果により

$$\mathrm{A}'\left(\frac{a-\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}},\ \frac{a+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}}\right),\quad \mathrm{H}'\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

曲線 $y=\dfrac{1}{2x}$ の点 $\mathrm{A}'$, $\mathrm{H}'$ から $x$ 軸にそれぞれ垂線 $\mathrm{A}'\mathrm{A}''$, $\mathrm{H}'\mathrm{H}''$ を引くと，求める面積 $S$ は

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{OA'A''}+\int_{\frac{a-\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{2x}\,dx-\triangle\mathrm{OH'H''} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{a-\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\Big[\ \log x\ \Big]_{\frac{a-\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\log\frac{1}{a-\sqrt{a^2-1}}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\log(a+\sqrt{a^2-1}) \end{aligned}$$



別解 (回転せずに求める)

$$S=\frac{1}{2}a\sqrt{a^2-1}-\int_1^a\sqrt{x^2-1}\,dx$$

$I=\displaystyle\int_1^a\sqrt{x^2-1}\,dx$ とおくと

$$\begin{aligned}
I&=\int_1^a(x)'\sqrt{x^2-1}\,dx=\Big[\ x\sqrt{x^2-1}\ \Big]_1^a-\int_1^a x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx\\
&=a\sqrt{a^2-1}-\int_1^a\frac{(x^2-1)+1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx\\
&=a\sqrt{a^2-1}-\int_1^a\sqrt{x^2-1}\,dx-\int_1^a\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx\\
&=a\sqrt{a^2-1}-I-\Big[\ \log(x+\sqrt{x^2-1})\ \Big]_1^a\\
&=a\sqrt{a^2-1}-I-\log(a+\sqrt{a^2-1})
\end{aligned}$$

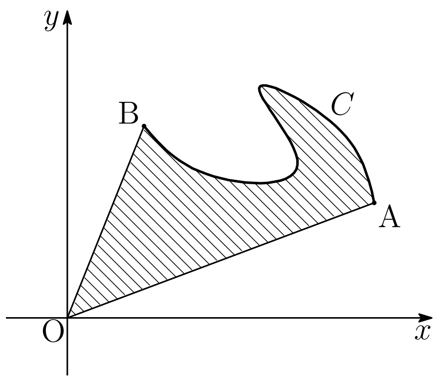
ゆえに　　$I=\dfrac{1}{2}a\sqrt{a^2-1}-\dfrac{1}{2}\log(a+\sqrt{a^2-1})$

よって　　$S=\dfrac{1}{2}\log(a+\sqrt{a^2-1})$

**ガウス・グリーンの定理**

曲線 $C: x=f(t),\ y=g(t)\ (\alpha\leqq t\leqq\beta)$ について，$t=\alpha,\ \beta$ に対応する点をそれぞれA，Bとする．$C$ と直線OA，OBで囲まれた部分の面積を $S$ とすると
(OBの偏角 >OAの偏角)

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\{f(t)g'(t)-f'(t)g(t)\}dt$$




別解 $xy=\dfrac{1}{2}$ を $x=f(t)=\dfrac{1}{2t}$，$y=g(t)=t$ とすると

$$f(t)g'(t)-f'(t)g(t)=\frac{1}{2t}\cdot 1-\left(-\frac{1}{2t^2}\right)t=\frac{1}{t}$$

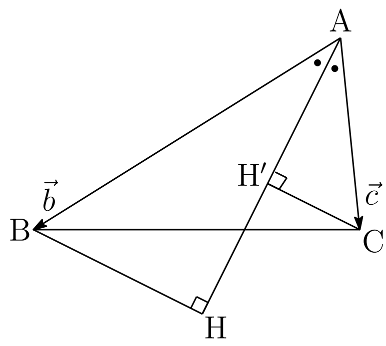
$$S=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt2}}^{\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt2}}\frac{1}{t}\,dt=\frac{1}{2}\Big[\ \log t\ \Big]_{\frac{1}{\sqrt2}}^{\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{\sqrt2}}=\frac{1}{2}\log(a+\sqrt{a^2-1})$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $\vec{d}=\dfrac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}$ とおくと

$$|\vec{d}|^2=\vec{d}\cdot\vec{d}=\left(\frac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}\right)=\frac{\vec{c}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}=\frac{|\vec{c}|^2}{|\vec{c}|^2}=1$$

したがって　$|\vec{d}|=1$　よって　ベクトル $\dfrac{1}{|\vec{c}|}\vec{c}$ の大きさは1

(2) 角Aの二等分線の方向ベクトルを




$$\vec{v}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$$

とおくと

$$|\vec{v}|^2=\left|\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right|^2=2\left(1+\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}\right)$$

$\vec{e}=\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{e})\vec{e}$,　$\overrightarrow{\mathrm{H'C}}=\vec{c}-(\vec{c}\cdot\vec{e})\vec{e}$

$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}+\overrightarrow{\mathrm{CH'}}=((\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{e})\vec{e}-\vec{b}-\vec{c}=\frac{1}{|\vec{v}|^2}((\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{v})\vec{v}-\vec{b}-\vec{c}$$

このとき　$(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{v}=(\vec{b}+\vec{c})\cdot\left(\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right)=|\vec{b}|+|\vec{c}|+\dfrac{(\vec{b}\cdot\vec{c})}{|\vec{b}||\vec{c}|}(|\vec{b}|+|\vec{c}|)$

$$=\left(1+\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}\right)(|\vec{b}|+|\vec{c}|)=\frac{1}{2}|\vec{v}|^2(|\vec{b}|+|\vec{c}|)$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{BH}}+\overrightarrow{\mathrm{CH'}}=\dfrac{1}{2}(|\vec{b}|+|\vec{c}|)\vec{v}-\vec{b}-\vec{c}$

$$=\frac{1}{2}(|\vec{b}|+|\vec{c}|)\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}+\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right)-\vec{b}-\vec{c}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(\frac{|\vec{c}|}{|\vec{b}|}-1\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\left(\frac{|\vec{b}|}{|\vec{c}|}-1\right)\vec{c}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BH}}+\overrightarrow{\mathrm{CH'}}=\vec{0}$ のとき，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は1次独立であるから，(2)の結果から

$$\frac{|\vec{c}|}{|\vec{b}|}-1=0,\quad \frac{|\vec{b}|}{|\vec{c}|}-1=0\quad \text{すなわち}\quad |\vec{b}|=|\vec{c}|$$

よって　△ABCは **AB = AC** の二等辺三角形

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) サイコロを振って 1，2，3 の目が出る事象を $X$，4，5 の目が出る事象を $Y$，6 の目が出る事象を $Z$ とすると，それぞれの事象が起きる確率は

$$P(X) = \frac{3}{6},\quad P(Y) = \frac{2}{6},\quad P(Z) = \frac{1}{6}$$

求める確率は，3 回とも $X$ または 3 回とも $Y$ が起こる確率であるから

$$\left(\frac{3}{6}\right)^3 + \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \mathbf{\frac{35}{216}}$$

(2) サイコロを 4 回振って点 P が頂点 E にあるのは，4 回の事象が

$$\{X,\ X,\ X,\ Y\},\quad \{X,\ X,\ Z,\ Z\},\quad \{Y,\ Y,\ Y,\ Y\}$$

のときであるから，求める確率は

$$\frac{4!}{3!1!}\left(\frac{3}{6}\right)^3\frac{2}{6} + \frac{4!}{2!2!}\left(\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{6}\right)^4 = \mathbf{\frac{143}{648}}$$

(3) サイコロを 6 回振って点 P が頂点 A にあるのは，6 回の事象が

$$\{X,\ X,\ X,\ X,\ X,\ X\},\ \{Y,\ Y,\ Y,\ Y,\ Y,\ Y\},\quad \{Z,\ Z,\ Z,\ Z,\ Z,\ Z\},$$
$$\{X,\ X,\ X,\ Y,\ Y,\ Y\},\quad \{X,\ X,\ Y,\ Y,\ Z,\ Z\},\ \{X,\ Y,\ Z,\ Z,\ Z,\ Z\}$$

のときであるから，求める確率は

$$\begin{aligned}&\left(\frac{3}{6}\right)^6 + \left(\frac{2}{6}\right)^6 + \left(\frac{1}{6}\right)^6 + \frac{6!}{3!3!}\left(\frac{3}{6}\right)^3\left(\frac{2}{6}\right)^3\\ &\qquad + \frac{6!}{2!2!2!}\left(\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{6!}{1!1!4!}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^4\\ &= \frac{8534}{6^6} = \mathbf{\frac{4267}{23328}}\end{aligned}$$