令和２年度　大分大学２次試験前期日程 (数学問題)
理工・経済・教育・医学部　令和 2 年 2 月 25 日

- 工学部は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (100 分)
- 経済学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 教育学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$ 数 I・II・A・B (80 分)
- 医学部は，$\boxed{6}$ 〜 $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B (80 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\triangle$ABC において AB $= 3$，BC $= 1$，$\angle$B $= 90^\circ$ とする．$\angle$B の二等分線と辺 AC の交点を D とし，3 点 A，B，D を通る円と直線 BC の交点のうち点 B と異なる点を E とする．また，直線 AB と直線 DE の交点を F とする．

(1) 線分 AD の長さを求めなさい．

(2) 線分 BE の長さを求めなさい．

(3) 線分 AF の長さを求めなさい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\triangle$OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とし，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は

$$|\vec{a}| = 1, \quad |\vec{b}| = 2. \quad |\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{7}$$

を満たすとする．s，t，k は

$$s \geqq 0, \quad t \geqq 0, \quad s + t = k$$

を満たす実数とし，点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (s-2t)\vec{a} + (s+t)\vec{b}$$

を満たしながら動くとする．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ と $|-2\vec{a}+\vec{b}|$ の値を求めなさい．

(2) $k = 1$ のとき，点 P の存在範囲を求めなさい．

(3) $1 \leqq k \leqq 2$ のとき，点 P の存在範囲を求めなさい．

(4) $1 \leqq k \leqq 2$ のとき，点 P の存在範囲の面積を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = (n+3)\left(\frac{1}{3}a_n - 2\right)$$

を満たすとする．

(1) a_1 を求めなさい．

(2) a_{n+1} を a_n，n を用いて表しなさい．

(3) 一般項 a_n を n を用いて表しなさい．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f(x)$ は等式

$$f(x) = \sin x + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt - \frac{3}{2}$$

を満たし，関数 $g(x)$ は

$$g(x) = -\int_0^x (x-t)\cos t\,dt + 1$$

とする．

(1) 関数 $f(x)$ を求めなさい．

(2) 関数 $g(x)$ の導関数を求めなさい．

(3) $-\pi \leqq x \leqq \pi$ において，2 つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めなさい．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 2 つの放物線 $C_1 : y = x^2 - 4x + 1$，$C_2 : y = x^2 + 2x - 5$ の両方に接する直線を ℓ とする．

(1) 2 つの放物線 C_1，C_2 の交点の座標を求めなさい．

(2) 直線 ℓ の方程式を求めなさい．

(3) 2 つの放物線 C_1，C_2 と直線 ℓ で囲まれた部分の面積を求めなさい．

6 n を任意の正の整数とし，2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ はともに n 回微分可能な関数とする．このとき以下の問いに答えなさい．

(1) 積 $f(x)g(x)$ の第 4 次導関数 $\dfrac{d^4}{dx^4}\{f(x)g(x)\}$ を求めなさい．

(2) 積 $f(x)g(x)$ の第 n 次導関数 $\dfrac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\}$ における $f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x)$ の係数を類推し，その類推が正しいことを数学的帰納法を用いて証明しなさい．ただし，r は負でない n 以下の整数とし，$f^{(0)}(x) = f(x)$，$g^{(0)}(x) = g(x)$ とする．

(3) 関数 $h(x) = x^3e^x$ の第 n 次導関数 $h^{(n)}(x)$ を求めなさい．ただし，e は自然対数の底であり，$n \geqq 4$ とする．

7 階段を上るとき，一度に上ることができる段数は 1 段または 2 段のみであるとする．このとき以下の問いに答えなさい．

(1) ちょうど 10 段上る方法は全部で何通りあるか答えなさい．

(2) n を正の整数とする．ちょうど n 段上る方法は全部で何通りあるか答えなさい．

8 座標平面上に動点 P があり，次のルールに従って移動するものとする．

ルール： サイコロ 1 個を振って，1，2，3 の目が出たら $(x,\ y) \to (x+1,\ y)$ のように移動し，4，5 の目が出たら $(x,\ y) \to (x,\ y+1)$ のように移動するが，6 の目が出たら移動しない．

はじめ点 P は原点 $(0,\ 0)$ にあるとして以下の問いに答えなさい．ただし，サイコロの目はどれも同様な確からしさで出るものとする．

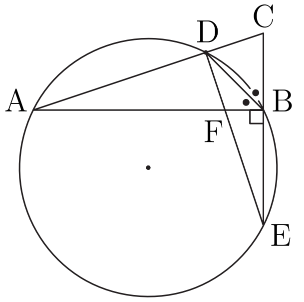
(1) 1 個のサイコロを 5 回振った時点で，点 P の座標が $(3,\ 2)$ である確率を求めなさい．

(2) 1 個のサイコロを 5 回振った時点で，点 P の座標が $(2,\ 2)$ である確率を求めなさい．

(3) k は正の整数であり，m，n は負でない整数とする．1 個のサイコロを k 回振った時点で，点 P の座標が $(m,\ n)$ である確率を $p_k(m,\ n)$ とする．和 $\displaystyle\sum_{m=0}^{k-1} p_k(m,\ k-m-1)$ を，k を用いて表しなさい．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$ から，三平方の定理により



$$\mathrm{CA}=\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$

BD は $\angle\mathrm{ABC}$ の二等分線であるから

$$\mathrm{AD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{BC}=3:1$$

よって　$\mathrm{AD}=\dfrac{3}{3+1}\mathrm{CA}=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}\sqrt{10}}$

(2) また，$\mathrm{CD}=\dfrac{1}{3+1}\mathrm{CA}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$　方べきの定理により　$\mathrm{CB}\cdot\mathrm{CE}=\mathrm{CD}\cdot\mathrm{CA}$

したがって　$1\cdot(1+\mathrm{BE})=\dfrac{\sqrt{10}}{4}\cdot\sqrt{10}$　これを解いて　$\mathbf{BE}=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

(3) $\angle\mathrm{ABE}=90^\circ$ であるから，AE は $\triangle\mathrm{ABE}$ の外接円の直径である．
また，D はこの円周上の点であるから　$\angle\mathrm{ADE}=90^\circ$
したがって　$\triangle\mathrm{ABC}\backsim\triangle\mathrm{ADF}$　ゆえに　$\mathrm{AC}:\mathrm{AB}=\mathrm{AF}:\mathrm{AD}$ より

$$\sqrt{10}:3=\mathrm{AF}:\frac{3}{4}\sqrt{10}\quad これを解いて\quad \mathbf{AF}=\boldsymbol{\frac{5}{2}}$$

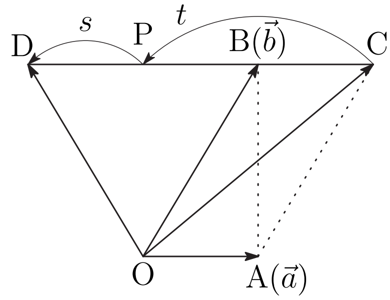
$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$ より　$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=7$
これに $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$ を代入すると

$$1+2\vec{a}\cdot\vec{b}+4=7\quad よって\quad \boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=1}$$

また　$|-2\vec{a}+\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
$=4\cdot1^2-4\cdot1+2^2=4$

よって　$|-2\vec{a}+\vec{b}|=\mathbf{2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(s-2t)\vec{a}+(s+t)\vec{b}$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s(\vec{a}+\vec{b})+t(-2\vec{a}+\vec{b})$$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-2\vec{a}+\vec{b}$ とおくと

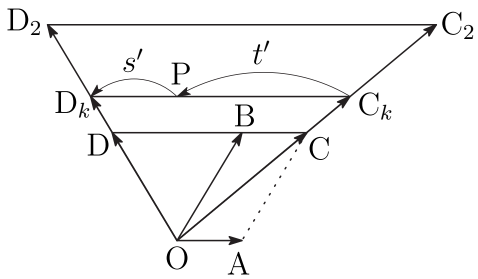
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}\quad\cdots(*)$$

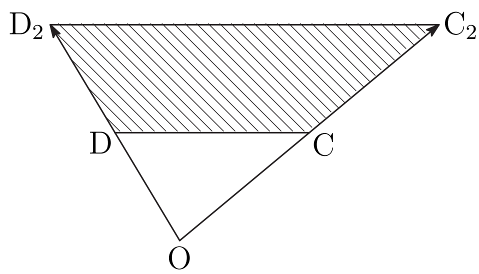
点 P は線分 CD を $t:s$ に内分する点である ($s\geqq0,\ t\geqq0,\ s+t=1$).
よって，P は線分 CD 上 (両端を含む) にある．

(3) $(*)$ において，$s=ks'$，$t=kt'$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}_k}=k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}_k}=k\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおく
$(s'\geqq 0,\ t'\geqq 0,\ s'+t'=1)$．なお，点 C_1，D_1 はそれぞれ C，D である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=ks'\overrightarrow{\mathrm{OC}}+kt'\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s'\overrightarrow{\mathrm{OC}_k}+t'\overrightarrow{\mathrm{OD}_k}$$

点 P は線分 $\mathrm{C}_k\mathrm{D}_k$ を $t':s'$ に内分する点である．$1\leqq k\leqq 2$ より，P の存在する範囲は，図の斜線部分の台形 $\mathrm{CC_2D_2D}$ の内部および境界線である．





(4) $\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$

$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-2\vec{a}+\vec{b}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=3\vec{a}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

したがって　$\triangle\mathrm{OCD}=3\triangle\mathrm{OAB}=3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

よって，求める面積は　$(2^2-1)\triangle\mathrm{OCD}=3\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{9\sqrt{3}}{2}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1)
$$S_n = (n+3)\left(\frac{1}{3}a_n - 2\right) \quad \cdots (*)$$

$(*)$ に $n=1$ を代入すると，$S_1 = a_1$ であるから，$(*)$ より

$$a_1 = 4\left(\frac{1}{3}a_1 - 2\right) \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a_1 = 24}$$

(2) $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ であるから

$$a_{n+1} = (n+4)\left(\frac{1}{3}a_{n+1} - 2\right) - (n+3)\left(\frac{1}{3}a_n - 2\right)$$

したがって $$\boldsymbol{a_{n+1} = \frac{(n+3)a_n}{n+1} + \frac{6}{n+1}}$$

(3) (2) の結果の両辺を $(n+2)(n+3)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{(n+2)(n+3)} = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)} + \frac{3(n+3) - 3(n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

整理すると $$\frac{a_{n+1}+3}{(n+2)(n+3)} = \frac{a_n+3}{(n+1)(n+2)}$$

したがって $$\frac{a_n+3}{(n+1)(n+2)} = \frac{24+3}{2\cdot 3}$$

よって $$a_n = \frac{9}{2}(n+1)(n+2) - 3 = \boldsymbol{\frac{3}{2}(3n^2+9n+4)}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $$f(x)=\sin x+3\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\cos t\,dt-\frac{3}{2}\quad\cdots(*)$$

$k=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\cos t\,dt$ とおくと，$f(x)=\sin x+3k-\dfrac{3}{2}\cdots$① より

$$\begin{aligned}k&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t+3k-\frac{3}{2}\right)\cos t\,dt\\&=\left[\,\frac{1}{2}\sin^2 t+\left(3k-\frac{3}{2}\right)\sin t\,\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=3k-1\end{aligned}$$

したがって　$k=\dfrac{1}{2}$　これを ① に代入して　$\boldsymbol{f(x)=\sin x}$

(2) $$g(x)=-\int_0^x(x-t)\cos t\,dt+1\quad\cdots(**)$$

$(**)$ より，$g(x)=-x\displaystyle\int_0^x\cos t\,dt+\int_0^x t\cos t\,dt+1$ を微分すると

$$\begin{aligned}g'(x)&=-\int_0^x\cos t\,dt-x\cos x+x\cos x\\&=-\Big[\,\sin t\,\Big]_0^x=\boldsymbol{-\sin x}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果を積分すると　$g(x)=\cos x+C$　(C は積分定数)

$(**)$ より，$g(0)=1$ であるから

$$1+C=1\quad\text{ゆえに}\quad C=0\quad\text{したがって}\quad g(x)=\cos x$$

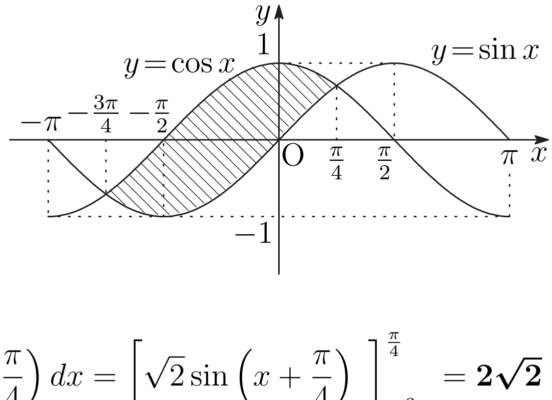
ここで　$g(x)-f(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$-\pi\leqq x\leqq\pi$ における $y=g(x)$ と
$y=f(x)$ の共有点の x 座標は

$$x=-\frac{3\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}$$

区間 $-\dfrac{3\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ において

$$g(x)-f(x)\geqq 0$$

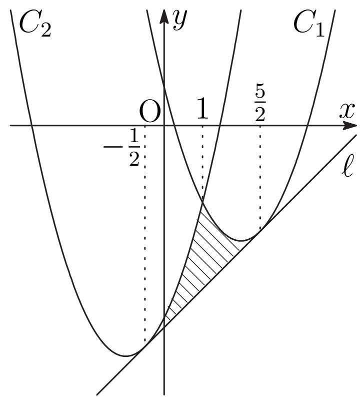


求める面積は　$\displaystyle\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx=\left[\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\,\right]_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $C_1 : y = x^2 - 4x + 1$，$C_2 : y = x^2 + 2x - 5$ から y を消去すると

$$x^2 - 4x + 1 = x^2 + 2x - 5 \quad ゆえに \quad x = 1 \quad 交点は \quad \mathbf{(1, -2)}$$

(2) ℓ の方程式を $y = ax + b$ とする．



C_1 と ℓ から y を消去すると

$$x^2 - 4x + 1 = ax + b$$

ゆえに　$x^2 - (a+4)x - b + 1 = 0$　$\cdots$①

C_2 と ℓ から y を消去すると

$$x^2 + 2x - 5 = ax + b$$

ゆえに　$x^2 + (2-a)x - b - 5 = 0$　$\cdots$②

①，② の方程式はともに重解をもつから，それぞれの係数について

$$(a+4)^2 - 4(-b+1) = 0, \quad (2-a)^2 - 4(-b-5) = 0$$

上の 2 式をそれぞれ整理すると

$$\begin{cases} a^2 + 8a + 4b + 12 = 0 \\ a^2 - 4a + 4b + 24 = 0 \end{cases} \quad これを解いて \quad a = 1,\ b = -\frac{21}{4} \quad \cdots(*)$$

よって，直線 ℓ の方程式は　$\boldsymbol{y = x - \dfrac{21}{4}}$

(3) $(*)$ を ①，② に代入すると

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 0, \qquad x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

C_1，C_2 と直線 ℓ の接点の x 座標は，それぞれ　$x = \dfrac{5}{2},\ -\dfrac{1}{2}$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left\{x^2 + 2x - 5 - \left(x - \frac{21}{4}\right)\right\} dx + \int_{1}^{\frac{5}{2}} \left\{x^2 - 4x + 1 - \left(x - \frac{21}{4}\right)\right\} dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 dx + \int_{1}^{\frac{5}{2}} \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 dx \\ &= \left[\ \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^3\ \right]_{-\frac{1}{2}}^{1} + \left[\ \frac{1}{3}\left(x - \frac{5}{2}\right)^3\ \right]_{1}^{\frac{5}{2}} = \boldsymbol{\frac{9}{4}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = f^{(1)}(x)g^{(0)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(1)}(x) \quad \cdots ①$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}\{f(x)g(x)\} &= \frac{d}{dx}\{f^{(1)}(x)g^{(0)}(x)\} + \frac{d}{dx}\{f^{(0)}(x)g^{(1)}(x)\} \\
&= f^{(2)}(x)g^{(0)}(x) + f^{(1)}(x)g^{(1)}(x) \\
&\qquad + f^{(1)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(2)}(x) \\
&= f^{(2)}(x)g^{(0)}(x) + 2f^{(1)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(2)}(x) \\
\frac{d^3}{dx^3}\{f(x)g(x)\} &= \frac{d}{dx}\{f^{(2)}(x)g^{(0)}(x)\} + 2\frac{d}{dx}\{f^{(1)}(x)g^{(1)}(x)\} + \frac{d}{dx}\{f^{(0)}(x)g^{(2)}(x)\} \\
&= f^{(3)}(x)g^{(0)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(1)}(x) \\
&\qquad + 2\left\{f^{(2)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(1)}(x)g^{(2)}(x)\right\} \\
&\qquad + f^{(1)}(x)g^{(2)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(3)}(x) \\
&= f^{(3)}(x)g^{(0)}(x) + 3f^{(2)}(x)g^{(1)}(x) \\
&\qquad + 3f^{(1)}(x)g^{(2)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(3)}(x) \\
\frac{d^4}{dx^4}\{f(x)g(x)\} &= \frac{d}{dx}\{f^{(3)}(x)g^{(0)}(x)\} + 3\frac{d}{dx}\{f^{(2)}(x)g^{(1)}(x)\} \\
&\qquad + 3\frac{d}{dx}\{f^{(1)}(x)g^{(2)}(x)\} + \frac{d}{dx}\{f^{(0)}(x)g^{(3)}(x)\} \\
&= f^{(4)}(x)g^{(0)}(x) + f^{(3)}(x)g^{(1)}(x) \\
&\qquad + 3\left\{f^{(3)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(2)}(x)\right\} \\
&\qquad + 3\left\{f^{(2)}(x)g^{(2)}(x) + f^{(1)}(x)g^{(3)}(x)\right\} \\
&\qquad + f^{(1)}(x)g^{(3)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(4)}(x) \\
&= \boldsymbol{f^{(4)}(x)g^{(0)}(x) + 4f^{(3)}(x)g^{(1)}(x) + 6f^{(2)}(x)g^{(2)}(x)} \\
&\qquad \boldsymbol{+4f^{(1)}(x)g^{(3)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(4)}(x)}
\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\}$ における $f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x)$ の係数を ${}_n\mathrm{C}_r$ であると推定すると

$$\frac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\} = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r f^{(n-r)}(x)g^{(r)}(x) \quad \cdots (*)$$

[1] ① から $\quad \dfrac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = {}_1\mathrm{C}_0 f^{(1)}(x)g^{(0)}(x) + {}_1\mathrm{C}_1 f^{(0)}(x)g^{(1)}(x)$

したがって，$n=1$ のとき，$(*)$ は成立する．

［2］ $n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$\frac{d^k}{dx^k}\{f(x)g(x)\}=\sum_{r=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_r f^{(k-r)}(x)g^{(r)}(x)$$

これを微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\{f(x)g(x)\} &= \sum_{r=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_r\{f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x)+f^{(k-r)}(x)g^{(r+1)}(x)\}\\
&= \sum_{r=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_r f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x)\\
&\qquad\qquad + \sum_{r=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_r f^{(k-r)}(x)g^{(r+1)}(x)\\
&= f^{(k+1)}(x)g^{(0)}(x)+\sum_{r=1}^{k}{}_k\mathrm{C}_r f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x)\\
&\qquad\qquad + \sum_{r=0}^{k-1}{}_k\mathrm{C}_r f^{(k-r)}(x)g^{(r+1)}(x)+f^{(0)}(x)g^{(k+1)}(x)\\
&= f^{(k+1)}(x)g^{(0)}(x)+\sum_{r=1}^{k}{}_k\mathrm{C}_r f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x)\\
&\qquad\qquad + \sum_{r=1}^{k}{}_k\mathrm{C}_{r-1} f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x)+f^{(0)}(x)g^{(k+1)}(x)\\
&= {}_{k+1}\mathrm{C}_0 f^{(k+1)}(x)g^{(0)}(x)\\
&\qquad + \sum_{r=1}^{k}({}_k\mathrm{C}_r+{}_k\mathrm{C}_{r-1})f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x)\\
&\qquad\qquad\qquad + {}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1} f^{(0)}(x)g^{(k+1)}(x)\\
&= {}_{k+1}\mathrm{C}_0 f^{(k+1)}(x)g^{(0)}(x)\\
&\qquad + \sum_{r=1}^{k}{}_{k+1}\mathrm{C}_r f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x)\\
&\qquad\qquad\qquad + {}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1} f^{(0)}(x)g^{(k+1)}(x)\\
&= \sum_{r=0}^{k+1}{}_{k+1}\mathrm{C}_r f^{(k+1-r)}(x)g^{(r)}(x)
\end{aligned}$$

したがって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成立する．

［1］，［2］ より，すべての自然数 n について $(*)$ が成立する．

(3) $h(x) = x^3 e^x = e^x x^3$ について，(2) の結果を適用すると ($n \geqq 4$)

$$\begin{aligned}
h^{(n)}(x) &= \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r (e^x)^{(n-r)}(x^3)^{(r)} \\
&= \sum_{r=0}^{3} {}_n\mathrm{C}_r (e^x)^{(n-r)}(x^3)^{(r)} + \sum_{r=4}^{n} {}_n\mathrm{C}_r (e^x)^{(n-r)}(x^3)^{(r)} \\
&= \sum_{r=0}^{3} {}_n\mathrm{C}_r (e^x)^{(n-r)}(x^3)^{(r)} \\
&= {}_n\mathrm{C}_0 e^x \cdot x^3 + {}_n\mathrm{C}_1 e^x \cdot 3x^2 + {}_n\mathrm{C}_2 e^x \cdot 6x + {}_n\mathrm{C}_3 e^x \cdot 6 \\
&= \boldsymbol{e^x\{x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)\}}
\end{aligned}$$

補足 (2) の結果は，ライプニッツ (Leibniz) の公式と呼ばれている．

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 与えらた規則により，n 段の階段を上る方法を a_n 通りとすると

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \cdots (*)$$

が成立する．これから，順次

$$\begin{aligned}
a_3 &= a_2 + a_1 = 2 + 1 = 3, \\
a_4 &= a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5, \\
a_5 &= a_4 + a_3 = 5 + 3 = 8, \\
a_6 &= a_5 + a_4 = 8 + 5 = 13, \\
a_7 &= a_6 + a_5 = 13 + 8 = 21, \\
a_8 &= a_7 + a_6 = 21 + 13 = 34, \\
a_9 &= a_8 + a_7 = 34 + 21 = 55, \\
a_{10} &= a_9 + a_8 = 55 + 34 = 89
\end{aligned}$$

よって　**89** 通り

(2) (1) より，特性方程式

$$x^2 = x + 1 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad \cdots (**)$$

の解を α，β とすると $(\alpha < \beta)$ $\quad \alpha + \beta = 1$，$\alpha\beta = -1$

$$a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$$

したがって $\quad a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$

$(*)$ から $\quad a_0 = 1$ であるから

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha a_n &= \beta^n(a_1 - \alpha a_0) = \beta^n(1 - \alpha) = \beta^{n+1} \\ a_{n+1} - \beta a_n &= \alpha^n(a_1 - \beta a_0) = \alpha^n(1 - \beta) = \alpha^{n+1} \end{aligned}$$

上の 2 式から $\quad (\beta - \alpha)a_n = \beta^{n+1} - \alpha^{n+1}$ $\quad$ ゆえに $\quad a_n = \dfrac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}$

方程式 $(**)$ の解は $\quad x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ $\quad$ ゆえに $\quad \alpha = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$，$\quad \beta = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

よって，階段をちょうど n 段上る方法は

$$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}}$$

$\boxed{8}$ (1) 1，2，3 の目が 3 回，4，5 の目が 2 回出る確率であるから

$$\frac{5!}{3!2!}\left(\frac{3}{6}\right)^3\left(\frac{2}{6}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{5}{36}}$$

(2) 1，2，3 の目が 2 回，4，5 の目が 2 回，6 の目が 1 回出る確率であるから

$$\frac{5!}{2!2!1!}\left(\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{5}{36}}$$

(3) $p_k(m,\ k-m-1)$ は，1，2，3 の目が m 回，4，5 の目が $k-m-1$ 回，6 の目が 1 回出る確率であるから

$$\begin{aligned}p_k(m,\ k-m-1) &= \frac{k!}{m!(k-m-1)!1!}\left(\frac{3}{6}\right)^m\left(\frac{2}{6}\right)^{k-m-1}\frac{1}{6}\\ &= \frac{k}{6}\cdot\frac{(k-1)!}{m!(k-m-1)!}\left(\frac{3}{6}\right)^m\left(\frac{2}{6}\right)^{k-m-1}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{k-1}p_k(m,\ k-m-1) &= \frac{k}{6}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(k-1)!}{m!(k-m-1)!}\left(\frac{3}{6}\right)^m\left(\frac{2}{6}\right)^{k-m-1}\\ &= \frac{k}{6}\left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\right)^{k-1} = \boldsymbol{\frac{k}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}}\end{aligned}$$